

# Lezione 6

## Capitalizzazione composta

Maurizio Pratelli

# Capitalizzazione composta

Ricordiamo la **regola della capitalizzazione composta** su un periodo frazionato con interesse sul periodo  $i_k$  e tempo misurato secondo il periodo  $t_k$

$$M = C (1 + i_k)^{t_k}$$

Due interessi su due periodi diversi sono **equivalenti** se danno lo stesso montante per qualsiasi tempo  $t$ .

Cominciamo a vedere qual è l'interesse annuo equivalente a  $i_k$  : al termine dell'anno si ha

$$C (1 + i_k)^k = C (1 + i)$$

Dunque l'interesse frazionario  $i_k$  (nella capitalizzazione composta) è **equivalente all'interesse annuo**

$$i = (1 + i_k)^k - 1$$

cioè qualunque sia l'intervallo di tempo i due interessi producono lo stesso risultato.

Infatti, rispetto al tempo misurato in anni indicato  $t$ , misurato in frazioni di anno si ha  $t_k = k t$  e dunque

$$(1 + i_k)^{t_k} = (1 + i_k)^{k t} = \left( (1 + i_k)^k \right)^t = (1 + i)^t$$

Più in generale due interessi frazionari  $i_h$  e  $i_k$  sono equivalenti se eguale è il loro interesse annuo equivalente, cioè se si ha

$$(1 + i_h)^h = (1 + i_k)^k$$

Si può scrivere una formula di passaggio dall'interesse  $i_h$  all'interesse equivalente  $i_k$  che però raramente si usa ed è piuttosto complessa, tuttavia per completezza la riportiamo qua sotto:

$$i_k = (1 + i_h)^{\frac{h}{k}} - 1$$

Esercizio 1. Confrontare a quanto si rivalutano 1000 € al tasso di interesse annuo del 4 %, secondo i criteri della capitalizzazione semplice e composta, rispettivamente dopo 2, 10 e 20 anni.



Esercizio 2. Un capitale di 10.000 € ha prodotto dopo 5 anni un montante pari a 13382,26 € : a quale tasso d'interesse era stato impiegato?





Esercizio 3. Confrontare in quanto tempo, secondo i criteri della capitalizzazione semplice e composta, un capitale di 10.000 € impiegato al tasso d'interesse annuo del 4 % può diventare 12.000 € .





**Una nuova definizione:** *tasso annuo nominale convertibile  $k$  volte in un anno.*

Questo significa semplicemente:

- si parte dal tasso annuo nominale  $i$
- si considera il tasso frazionato  $i_k = \frac{i}{k}$
- si effettua la capitalizzazione composta rispetto all'interesse frazionato  $i_k$ .

**Nota bene:** il tasso annuo  $i$  in realtà è un tasso fittizio.

Perché allora si usa questa terminologia?

E' usuale, soprattutto in termini commerciali, riferirsi a tassi annui.

Ad esempio si usa dire *“un BOT a 3 mesi che rende il 2,8 % all'anno” ...*

Il realtà il tasso d'interesse di questo BOT è trimestrale, ed è  $\frac{2,8}{4}$  .

Ad esempio, quando una banca propone un “*mutuo ventennale al tasso fisso del 3,5 % annuo*”, in realtà intende questo:

- il mutuo viene pagato attraverso rate di pagamento mensili, ed i calcoli si effettuano secondo la *capitalizzazione composta mese per mese* (il tempo cioè si calcola in mesi, dunque 240 mesi)
- la capitalizzazione composta si calcola con il tasso mensile  
$$i_{12} = \frac{0,035}{12} = 0,00291666$$
, cioè 0,291 % al mese
- l'interesse annuo equivalente è  
$$i = (1 + i_{12})^{12} - 1 = 1,00291^{12} - 1 = 0,03548$$
 cioè il 3,548 % annuo.

Studieremo ammortamenti e mutui più avanti nel corso.

Esercizio. Calcolare il valore attuale di una somma di 10.000 € disponibile tra 21 mesi scontata al tasso annuo nominale convertibile 4 volte all'anno dello 8,5 %.





Il valore attuale  $A$  di un debito futuro  $N$  calcolato secondo il criterio della capitalizzazione composta a un tasso d'interesse annuo  $i$  è dato da

$$\begin{aligned} S &= N - A = N - \frac{N}{(1+i)^t} = \\ &= N \left( 1 - \frac{1}{(1+i)^t} \right) = N \left( \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t} \right) \end{aligned}$$

come si vede una formula piuttosto scomoda (almeno nella pratica commerciale).

È usuale nella pratica introdurre quello che viene chiamato lo **sconto commerciale**  $d$ , lo sconto  $S$  cioè è dato dalla formula

$$S = N d t$$

dove il tasso  $d$  è usualmente annuo e il tempo  $t$  calcolato in anni.

Esempio. Una cambiale di 400 € che scade tra due anni viene scontata al tasso di sconto annuale del 5 %: calcolare a quanto può essere riscattata adesso.

Confrontare col prezzo di riscatto calcolato secondo lo stesso interesse ma con la regola della capitalizzazione composta.



Esercizio. Volendo investire 3000 € per 30 mesi, ci vengono offerte queste alternative

- ricevere alla scadenza 3440 €
- investire in regime di capitalizzazione semplice al tasso trimestrale dello 1,5 %
- investire in regime di capitalizzazione composta al tasso annuo del 5,5 %

Quale di queste alternative è più conveniente?



