Lezione 6
Capitalizzazione composta

Maurizio Pratelli

Capitalizzazione composta

Ricordiamo la regola della capitalizzazione composta su un periodo frazionato con interesse sul periodo i_k e tempo misurato secondo il periodo t_k

$$M = C\left(1 + i_k\right)^{t_k}$$

Due interessi su due periodi diversi sono equivalenti se danno lo stesso montante per qualsiasi tempo t .

Cominciamo a vedere qual è l'interesse annuo equivalente a i_k : al termine dell'anno si ha

$$C\left(1 + i_k\right)^k = C\left(1 + i\right)$$

Capitalizzazione composta

Dunque l'interesse frazionario i_k (nella capitalizzazione composta) è equivalente all'interesse annuo

$$i = \left(1 + i_k\right)^k - 1$$

cioè qualunque sia l'intervallo di tempo i due interessi producono lo stesso risultato.

Infatti, rispetto al tempo misurato in anni indicato t, misurato in frazioni di anno si ha $t_k = k\,t$ e dunque

$$\left(1 + i_k\right)^{t_k} = \left(1 + i_k\right)^{k\,t} = \left(\left(1 + i_k\right)^k\right)^t = \left(1 + i\right)^t$$

Capitalizzazione composta

Più in generale due interessi frazionari i_h e i_k sono equivalenti se eguale è il loro interesse annuo equivalente, cioè se si ha

$$\left(1 + i_h\right)^h = \left(1 + i_k\right)^k$$

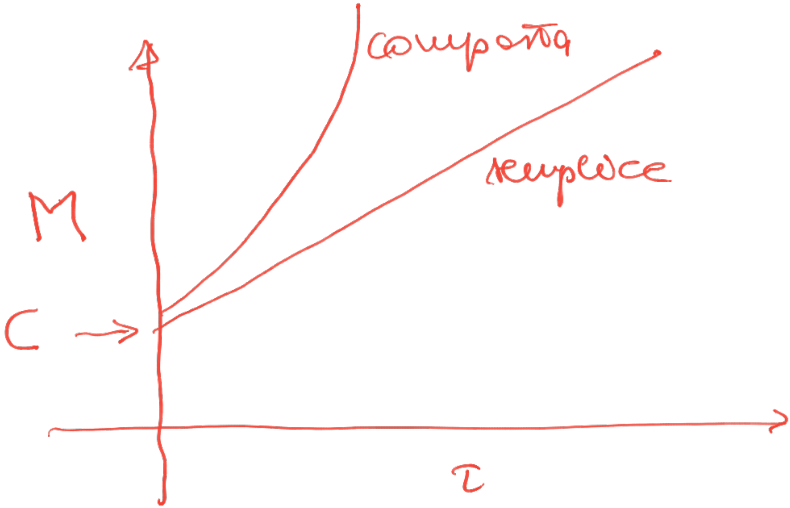
Si può scrivere una formula di passaggio dall'interesse i_h all'interesse equivalente i_k che però raramente si usa ed è piuttosto complessa, tuttavia per completezza la riportiamo qua sotto:

$$i_k = \left(1 + i_h\right)^{\frac{h}{k}} - 1$$

$$M = 1000 \times (1 + t \times 0{,}04) \qquad M = 1000 \times (1 + 0{,}04)^t$$

Esercizio 1. Confrontare a quanto si rivalutano 1000 € al tasso di interesse annuo del 4 %, secondo i criteri della capitalizzazione semplice e composta, rispettivamente dopo 2, 10 e 20 anni.

Semplice	Composta
1080 €	1081,6 €
1400 €	1480,24 €
1800 €	2191,12 €


composta
semplice
M
C
τ

Esercizi

Esercizio 2. Un capitale di 10.000 € ha prodotto dopo 5 anni un montante pari a 13382,26 € : a quale tasso d’interesse era stato impiegato?

$$M = C(1+i)^t$$

$$13382,26 = 10000 \times (1+i)^5$$

$$(1+i)^5 = \frac{13.382,26}{10.000} = 1,338226$$

$$(1+i) = 1{,}338226^{1/5}$$

$$i = 1{,}338226^{1/5} - 1 = 0{,}06$$

interesse 6% annuo

Esercizio 3. Confrontare in quanto tempo, secondo i criteri della capitalizzazione semplice e composta, un capitale di 10.000 € impiegato al tasso d'interesse annuo del 4 % può diventare 12.000 € .

Capitalizzazione semplice

$$12.000 = 10.000 \times (1 + \tau \times 0{,}04)$$

$$1{,}2 = 1 + \tau \times 0{,}04 \qquad \tau \times 0{,}04 = 0{,}2$$

$$\tau = 5 \qquad \text{in 5 anni}$$

Capitalizzazione composta:

$$12.000 = 10.000 \times (1+0{,}04)^{\tau}$$

$$1{,}2 = 1{,}04^{\tau}$$

$$\log(1{,}2) = \log(1{,}04)^{\tau} = \tau \log(1{,}04)$$

$$\tau = \frac{\log(1{,}2)}{\log(1{,}04)} = 4{,}648 \text{ anni}$$

Proprietà essenziali dei logaritmi:

(in base 10)

$\log b = x$ vuol dire $10^x = b$

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log(a^b) = b \log(a)$$

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = \log(a^{-1}) = -\log(a)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) + \log\left(\frac{1}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Capitalizzazione composta: tassi nominali convertibili

Una nuova definizione: *tasso annuo nominale convertibile k volte in un anno.*

Questo significa semplicemente:

- si parte dal tasso annuo nominale i
- si considera il tasso frazionato $i_k = \frac{i}{k}$
- si effettua la capitalizzazione composta rispetto all'interesse frazionato i_k .

Nota bene: il tasso annuo i in realtà è un tasso fittizio.

il "vero" tasso annuo è

$$\left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$$

Capitalizzazione composta: tassi nominali convertibili

Perché allora si usa questa terminologia?

E’ usuale, soprattutto in termini commerciali, riferirsi a tassi annui.

Ad esempio si usa dire *“un BOT a 3 mesi che rende il 2,8 % all’anno”* ...

Il realtà il tasso d’interesse di questo BOT è trimestrale, ed è $\frac{2{,}8}{4}$.

Capitalizzazione composta: tassi nominali convertibili

Ad esempio, quando una banca propone un *"mutuo ventennale al tasso fisso del 3,5 % annuo"*, in realtà intende questo:

- il mutuo viene pagato attraverso rate di pagamento mensili, ed i calcoli si effettuano secondo la *capitalizzazione composta mese per mese* (il tempo cioè si calcola in mesi, dunque 240 mesi)
- la capitalizzazione composta si calcola con il tasso mensile $i_{12} = \frac{0{,}035}{12} = 0,00291666$, cioè 0,291 % al mese
- l'interesse annuo equivalente è $i = (1 + i_{12})^{12} - 1 = 1{,}00291^{12} - 1 = 0{,}03548$ cioè il 3,548 % annuo.

Studieremo ammortamenti e mutui più avanti nel corso.

Esercizio. Calcolare il valore attuale di una somma di 10.000 € disponibile tra 21 mesi scontata al tasso annuo nominale convertibile 4 volte all'anno dello 8,5 %.

- il tempo si calcola in trimestri
- il tasso trimestrale è $\frac{8,5}{4} = 2,125\ \%$

21 mesi = 7 trimestri

$$A = \frac{C}{(1+i_4)^{\tau_4}} = \frac{10.000}{1{,}02125^{7}} =$$

$$= 8.631{,}286$$

Lo sconto commerciale

Il valore attuale A di un debito futuro N calcolato secondo il criterio della capitalizzazione composta a un tasso d'interesse annuo i è dato da

$$S = N - A = N - \frac{N}{(1+i)^t} =$$
$$= N\left(1 - \frac{1}{(1+i)^t}\right) = N\left(\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t}\right)$$

come si vede una formula piuttosto scomoda (almeno nella pratica commerciale).

È usuale nella pratica introdurre quello che viene chiamato lo sconto commerciale d, lo sconto S cioè è dato dalla formula

$$S = N\,d\,t$$

dove il tasso d è usualmente annuo e il tempo t calcolato in anni.

Esempio. Una cambiale di 400 € che scade tra due anni viene scontata al tasso di sconto annuale del 5 %: calcolare a quanto può essere riscattata adesso.

Confrontare col prezzo di riscatto calcolato secondo lo stesso interesse ma con la regola della capitalizzazione composta.

sconto commerciale 5%

$$S = 400 \times 0{,}05 \times 2 = 40$$

$$A = N - S = 400 - 40 = 360$$

prezzo di riscatto

$$A = \frac{N}{(1+i)^{\tau}} = \frac{400}{(1+0{,}05)^2} = 400 \times (1{,}05)^{-2}$$

$$= 362{,}81$$

Esercizio. Volendo investire 3000 € per 30 mesi, ci vengono offerte queste alternative

- a) ricevere alla scadenza 3440 €
- b) investire in regime di capitalizzazione semplice al tasso trimestrale dello 1,5 %
- c) investire in regime di capitalizzazione composta al tasso annuo del 5,5 %

Quale di queste alternative è più conveniente?

a) 3440 €

b) $M = C(1 + i_4 \tau_4)$

$i_4 = 0,015 \qquad \tau_4 = 10$

$M = 3000 \times (1 + 0,015 \times 10) =$

$= 3000 \times 1,15 = 3450$ €

c) $M = 3000 \times (1 + 0,055)^t$

30 mesi = 2 anni e 6 mesi = 2,5 anni

$= 3000 \times 1,055^{2,5} = 3429,67$