

Lezione 4  
Introduzione alla Matematica Finanziaria  
Capitalizzazione ed Attualizzazione:  
capitalizzazione semplice

Maurizio Pratelli

Bibliografia: Alberto Cambini (2018-19) Matematica Finanziaria.

- **Capitalizzazione.** La somma  $C$  (chiamata **capitale**), investita oggi (al tempo  $t=0$ ), produce una somma  $M$  (detta **montante**) al tempo  $T>0$ : la differenza  $I=M-C$  è chiamata **interesse**.

$$M=C+I$$

Ad esempio si depositano in Banca 1000 € che dopo un anno sono prelevati con gli interessi.

- **Attualizzazione.** Si cerca oggi ( $t=0$ ) una somma  $A$  (detta **valore attuale**) in cambio di una somma futura  $N$  esigibile al tempo  $T>0$ : la differenza  $S=N-A$  è detta **sconto**.

$$A=N-S$$

Ad esempio si riscatta oggi un titolo che vale tra 6 mesi 3000 €, oppure si estingue in anticipo un debito di 4000 € con scadenza tra un anno.

L'interesse calcolato su un capitale è dato da un **tasso d'interesse** e dal tempo trascorso: ad esempio un capitale di 1000 € ad un interesse del 2 % annuo, frutta 1020 € tra un anno e 1010 € tra 6 mesi.  
Vale cioè la formula

$$I = C.i.t$$

dove  $i$  è il tasso d'interesse annuo e  $t$  il **tempo misurato in anni**.

**Problema:** come si misurano gli anni?

- **Anno civile:** 365 giorni (366 negli anni bisestili)
- **Anno commerciale:** un anno di 360 giorni, composto di 12 mesi **tutti di 30 giorni**

Esempio: come si esprime in anni (commerciali) una durata di 3 anni, 4 mesi e 12 giorni?

Soluzione: anni  $3 + \frac{4}{12} + \frac{12}{360} = 3,366$

E come si misura in mesi la stessa durata?

D'ora innanzi useremo sempre l'anno commerciale.

- **Interessi semplici:** solo il capitale iniziale produce interessi
- **Interessi composti:** dopo un certo periodo anche gli interessi vengono aggiunti al capitale e producono a loro volta interessi

Si può pensare come esempio a una somma depositata su un conto corrente per un periodo inferiore ad un anno o per periodi superiori.

Questa regola vale sia per la capitalizzazione che per l'attualizzazione: concentriamoci sulla **capitalizzazione semplice**.

Riprendiamo la formula della capitalizzazione

$$M = C (1 + i t)$$

dove  $i$  è il **tasso d'interesse annuo** e  $t$  il **tempo misurato in anni**.

Esempio 1: un capitale di 2000 € quale montante produce dopo un anno e 4 mesi a un tasso d'interesse annuo del 2,5 %?

Esempio 2: un capitale, investito al tasso d'interesse del 2,2 % annuo, ha generato dopo 3 anni un montante di 2984,8 € qual era il capitale iniziale?

Esempio 3: in quanti anni 3000 € investiti al 3% annuo possono diventare 3250 € ?



A volte è più comodo usare il tasso d'interesse  $i_k$  su una frazione  $k$ -sima dell'anno: ad esempio

- $i_2$  è il tasso d'interesse **semestrale**
- $i_4$  è il tasso d'interesse **trimestrale**

Allora la formula del montante diventa

$$M = C (1 + i_k t_k)$$

dove  $t_k$  è il tempo misurato in frazioni  $k$ -sime dell'anno.

Esempio: quanto diventa dopo tre anni un capitale di 2500 € investito al **tasso quadrimestrale** dell' 1,2 % ?

È intuitivo che un tasso d'interesse annuo del 4 % o un tasso d'interesse semestrale del 2 % producono lo stesso risultato.

**Definizione:** due tassi si dicono equivalenti se producono lo stesso interesse sulla stessa durata di tempo.

Il tasso annuo  $i$  è equivalente al tasso frazionario  $i_k = \frac{i}{k}$  (infatti si ha  $t_k = k t$ ).

Di conseguenza i tassi  $i_h$  e  $i_k$  sono equivalenti se  $\frac{i_h}{i_k} = \frac{k}{h}$ .

**Osservazione:** ci si può sempre riportare al tasso annuale  $i$ .

L'attualizzazione è del tutto speculare alla capitalizzazione, questa volta però è il **valore attuale** che viene rivalutato al tasso d'interesse di riferimento fino ad arrivare alla somma finale N.

Vale cioè la formula

$$A(1 + it) = N$$

o equivalentemente

$$A = \frac{N}{1+it}$$

**Esempio** Voglio riscattare con 6 mesi di anticipo un debito di 5000 € al tasso d'interesse annuo del 7 % : quanto devo pagare?

**Esercizio** Provare che vale la formula per lo sconto

$$S = N - A = N \left( \frac{it}{1+it} \right)$$