

Lezione 4
Introduzione alla Matematica Finanziaria
Capitalizzazione ed Attualizzazione:
capitalizzazione semplice

Maurizio Pratelli

Bibliografia: Alberto Cambini (2018-19) Matematica Finanziaria.

- **Capitalizzazione.** La somma C (chiamata **capitale**), investita oggi (al tempo $t=0$), produce una somma M (detta **montante**) al tempo $T>0$: la differenza $I=M-C$ è chiamata **interesse**.

$$M=C+I$$

Ad esempio si depositano in Banca 1000 € che dopo un anno sono prelevati con gli interessi.

- **Attualizzazione.** Si cerca oggi ($t=0$) una somma A (detta **valore attuale**) in cambio di una somma futura N esigibile al tempo $T>0$: la differenza $S=N-A$ è detta **sconto**.

$$A=N-S$$

Ad esempio si riscatta oggi un titolo che vale tra 6 mesi 3000 €, oppure si estingue in anticipo un debito di 4000 € con scadenza tra un anno.

L'interesse calcolato su un capitale è dato da un **tasso d'interesse** e dal tempo trascorso: ad esempio un capitale di 1000 € ad un interesse del 2 % annuo, frutta 1020 € tra un anno e 1010 € tra 6 mesi.
Vale cioè la formula

$$I = C.i.t$$

dove i è il tasso d'interesse annuo e t il **tempo misurato in anni**.

Problema: come si misurano gli anni?

- **Anno civile**: 365 giorni (366 negli anni bisestili)
- **Anno commerciale**: un anno di 360 giorni, composto di 12 mesi **tutti di 30 giorni**

Esempio: come si esprime in anni (commerciali) una durata di 3 anni, 4 mesi e 12 giorni?

Soluzione: anni $3 + \frac{4}{12} + \frac{12}{360} = 3,366$

E come si misura in mesi la stessa durata?

$$36 + 4 + \frac{12}{30} = 40,39$$

D'ora innanzi useremo sempre l'anno commerciale.

- **Interessi semplici:** solo il capitale iniziale produce interessi
- **Interessi composti:** dopo un certo periodo anche gli interessi vengono aggiunti al capitale e producono a loro volta interessi

Si può pensare come esempio a una somma depositata su un conto corrente per un periodo inferiore ad un anno o per periodi superiori.

Questa regola vale sia per la capitalizzazione che per l'attualizzazione: concentriamoci sulla **capitalizzazione semplice**.

Formule della capitalizzazione semplice

Riprendiamo la formula della capitalizzazione

$$M = C (1 + i t)$$

dove i è il **tasso d'interesse annuo** e t il **tempo misurato in anni**.

Esempio 1: un capitale di 2000 € quale montante produce dopo un anno e 4 mesi a un tasso d'interesse annuo del 2,5 %?

$$2000 \left(1 + \frac{4}{3} \times 0,025 \right) = 2066,66$$

Esempio 2: un capitale, investito al tasso d'interesse del 2,2 % annuo, ha generato dopo 3 anni un montante di 2984,8 € qual era il capitale iniziale?

$$C = \frac{2984,8}{1 + 3 \times 0,022} = 2799,24$$

Esempio 3: in quanti anni 3000 € investiti al 3% annuo possono diventare 3250 € ?

$$1 + t \times 0,03 = \frac{3250}{3000}$$

$$t = \frac{3250 - 3000}{3000 \times 0,03} = \frac{25}{9} = 2,77$$

A volte è più comodo usare il tasso d'interesse i_k su una frazione k -sima dell'anno: ad esempio

- i_2 è il tasso d'interesse **semestrale**
- i_4 è il tasso d'interesse **trimestrale**

Allora la formula del montante diventa

$$M = C (1 + i_k t_k)$$

dove t_k è il tempo misurato in frazioni k -sime dell'anno.

Esempio: quanto diventa dopo tre anni un capitale di 2500 € investito al **tasso quadrimestrale** dell' 1,2 % ?

$$2500 \cdot (1 + 9 \times 0,012) = 2770$$

È intuitivo che un tasso d'interesse annuo del 4 % o un tasso d'interesse semestrale del 2 % producono lo stesso risultato.

Definizione: due tassi si dicono equivalenti se producono lo stesso interesse sulla stessa durata di tempo.

Il tasso annuo i è equivalente al tasso frazionario $i_k = \frac{i}{k}$ (infatti si ha $t_k = k t$).

Di conseguenza i tassi i_h e i_k sono equivalenti se $\frac{i_h}{i_k} = \frac{k}{h}$.

Osservazione: ci si può sempre riportare al tasso annuale i .

L'attualizzazione è del tutto speculare alla capitalizzazione, questa volta però è il **valore attuale** che viene rivalutato al tasso d'interesse di riferimento fino ad arrivare alla somma finale N.

Vale cioè la formula

$$A(1 + it) = N$$

o equivalentemente

$$A = \frac{N}{1+it}$$

Esempio Voglio riscattare con 6 mesi di anticipo un debito di 5000 € al tasso d'interesse annuo del 7 % : quanto devo pagare?

$$\frac{5000}{1 + \frac{1}{2} \times 0,07} = 4830,91$$

Esercizio Provare che vale la formula per lo sconto

$$S = N - A = N \left(\frac{it}{1+it} \right)$$

$$\begin{aligned} S &= N - \frac{N}{1+it} = N \left(\frac{1+it-1}{1+it} \right) = \\ &= N \left(\frac{it}{1+it} \right) \end{aligned}$$