Esercizi conclusivi

Maurizio Pratelli

Esercizio 1 Determinare in quanto tempo la somma di 80.000 € , investita su un libretto vincolato che offre un tasso annuo del 3,2 %, può diventare 100.000 €

Capitalizzazione composta su base annua, n numero di anni di giacenza

$$80.000\,(1+0{,}032)^n = 100.000$$

cioè $\quad 1{,}032^n = \dfrac{100.000}{80.000} = 1{,}25$

$$\log\left(1{,}032^n\right) = n\log(1{,}032) =$$

$$= \log(1{,}25)$$

$$n = \frac{\log(1{,}25)}{\log(1{,}032)} = 7{,}084$$

7 anni e un mese circa

Esercizio 2 Consideriamo le due seguenti operazioni finanziarie:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -500 & 220 & 300 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -500 & X & 2X \end{pmatrix}$$

Dire per quale valore della somma X le due operazioni hanno lo stesso TIR.

Calcoliamo per prima cosa TIR_A

$$-500 + \frac{220}{(1+i_A)} + \frac{300}{(1+i_A)^2} = 0$$

$$x = (1 + i_A)$$

$$50x^2 - 22x - 30 = 0$$

$$(1+i_A) = x = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4\times 30\times 50}}{100} = 1{,}025$$

$i_A = 2{,}5\%$ nel periodo

TIR_B

$$-500 + \frac{X}{(1+i_B)} + \frac{2X}{(1+i_B)^2} = 0$$

imponendo $i_B = i_A$ si ottiene

$$X\left(\frac{1}{1+i_A}+\frac{2}{(1+i_A)^2}\right)=500$$

$$X\left(1{,}025^{-1}+2\times 1{,}025^{-2}\right)=500$$

$$X=\frac{500}{1{,}025^{-1}+2\times 1{,}025^{-2}}=$$

$$=192{,}76$$

Esercizio 3 Voglio garantirmi a partire dal 1 gennaio "25 una rendita trimestrale di 1500 € , per 4 anni, da riscuotere alla fine del trimestre.

Sapendo che la Banca riconosce sulle somme depositate un interesse annuo del 2,4 % , quale somma devo depositare al 31 dicembre "24 per garantirmi questa rendita?

Misuriamo il tempo in trimestri

$$(1+i_4)^4 = 1{,}024 \quad \text{cioè}$$

$$i_4 = 1{,}024^{1/4} - 1 = 0{,}0059$$

Ci sono 16 trimestri

$$A = \frac{1500}{(1+i_4)} + \dots + \frac{1500}{(1+i_4)^{16}}$$

$$a + a^2 + \dots + a^{16} = \frac{a^{17} - a}{a - 1}$$

$$a = \frac{1}{1+i_4} = (1{,}0059)^{-1} = 0{,}9941$$

$$\frac{0{,}9941^{17} - 0{,}9941}{0{,}9941 - 1} = 15{,}22$$

E quindi $A = 1500 \times 15{,}22$

$$= 22.831{,}22$$

Notiamo che senza interessi avrei avuto

$$A = 1500 \times 16 = 24.000$$

Esercizio 4 Un contratto di leasing per una attrezzatura industriale del costo di 60.000 € prevede il pagamento immediato di 10.000 € , il pagamento di 48 rate mensili posticipate eguali ed un valore di riscatto pari al 10 % del costo iniziale dell'attrezzatura.

Poiché il tasso d'interesse annuo sul mercato è di 8,2 % per i contratti di leasing, quanto dovrebbe essere l'importo equo di ogni rata?

$$60.000 = 10.000 + \frac{R}{(1+i_{12})} + \dots + \frac{R}{(1+i_{12})^{48}} + \frac{6000}{(1+i_{12})^{48}}$$

$$(1+i_{12})^{12} = 1{,}082 \qquad (1+i_{12}) = 1{,}082^{1/12} = 1{,}0065$$

$$50.000 = R\left((1+i_{12})^{-1} + \dots + (1+i_{12})^{-48}\right) + \frac{6000}{(1+i_{12})^{48}}$$

$$\frac{6000}{(1+i_{12})^{48}} = \frac{6000}{1{,}00658^{48}} = 4379{,}58$$

$$a + \dots + a^{48} = \frac{a^{49} - a}{a-1} \qquad a = 1{,}00658^{-1}$$

$$(1+i_{12})^{-1} + \dots + (1+i_{12})^{-48} = 41{,}04$$

$$R \times 41{,}04 = 50.000 - 4379{,}58$$

$$R = 1111{,}60$$

Esercizio 5 Un debito di 35.000 € contratto per la ristrutturazione di una casa, è stato convenuto con la Banca un ammortamento quinquennale a rate semestrali costanti al tasso annuo del 4,8 %.

a) Qual è l'importo di ogni rata?

Dopo due anni il cliente chiede di non pagare le rate per un anno: la Banca concede di dilazionare il debito alzando però il tasso d'interesse al 5,2 %.

b) Qual è l'importo di ogni rata per questo ulteriore periodo?

Il cliente chiede poi di estinguere il debito con 6 mesi di anticipo:

c) Quanto deve pagare in totale nell'ultima rata?

Tempo due semestri

$i_2 = 0,24$

i è un tasso nominale convertibile 2 volte

Importo della rata

$$R = 35.000 \times \frac{0{,}024}{1 - 1{,}024^{-10}} = 3978{,}42$$

Dopo 2 anni il debito residuo è

$$D_4 = \frac{R}{i_2}\left(1 - (1+i_2)^{-6}\right) =$$

$$= \frac{3978{,}42 \times (1 - 1{,}024^{-6})}{0{,}024} = 21987{,}11$$

Dopo tre anni però il debito è diventato

$$21987{,}11 \times 1{,}052 = 23.130{,}43$$

il nuovo interesse semestrale è

$$i_2 = 0{,}26$$

restano 6 rate e la nuova rata diventa

$$R_2 = \frac{23.130{,}43 \times 0{,}026}{1 - 1{,}026^{-6}} = 4213{,}38$$

Esercizio 6 Sono possibili due investimenti:

a) investire oggi 10000 € ricevendone 11.600 tra due anni

b) investire la stessa somma ricevendo 6000 € tra un anno e 5000 tra due anni.

Vogliamo scegliere l'investimento più conveniente secondo il criterio del REA: esaminare per quali valori del tasso di interesse di riferimento l'investimento a) è preferibile all'investimento b).

con interessi bassi conviene a)

con interessi alti conviene b)

i = interesse annuo riferimento

$$REA_A \quad -10.000 + \frac{11.600}{(1+i)^2}$$

$$REA_B \quad -10.000 + \frac{6000}{(1+i)} + \frac{5000}{(1+i)^2}$$

$$REA_A > REA_B$$

$$\cancel{-10.000} + \frac{11.600}{(1+i)^2} > \cancel{-10000} + \frac{6000}{(1+i)} + \frac{5000}{(1+i)^2}$$

$$\frac{11.600}{(1+i)^2} - \frac{5000}{(1+i)^2} > \frac{6000}{(1+i)}$$

$$\frac{6600}{(1+i)^2} > \frac{6000}{(1+i)}$$

$$(1+i) < \frac{6600}{6000} = 1,1$$

se l'interesse è inferiore al 10% an= nuo conviene a), altrimenti con= viene b)

Esercizio 7 Per il pagamento di un server del costo di 10.000 € , non disponendo immediatamente della somma necessaria, l'amministratore di una ditta valuta tre possibilità di finanziamento:

a) il fornitore offre di posticipare il pagamento di 90 giorni portandolo a 10364 €

b) una banca si offre di finanziare l'acquisto mediante il pagamento di 10 rate mensili con ammortamento a quote di capitale costanti; la prima rata, da saldare dopo un mese, è di 1100 €

c) una finanziaria offre di coprire l'acquisto con un leasing di due canoni semestrali posticipati di 4448 € ciascuno ed un valore di riscatto di 2000 € ; ci sono inoltre 100 € di commissioni al momento del versamento di ogni canone.

Per ognuno di questi finanziamenti calcolare il TIR per decidere quale sia più conveniente.

Caso a) Ho un interesse trimestrale

$$10.000\,(1+i_4) = 10.364$$

$$(1+i_4) = 1,0364$$

$$i = (1+i_4)^4 - 1 = 0,153$$

cioè $TIR_A = 15,3\%$ (molto alto!)

Caso b) La prima rata è

$$\frac{A}{n} + iA = 1000 + i \times 10.000 =$$

$$= 1.100$$

cioè l'interesse mensile è 1%.

In termini annuali

$$i = (1+0{,}01)^{12} - 1 = 0{,}1268$$

cioè $TIR_B = 12{,}68\%$

Caso c) Per trovare l'interesse semestrale i_2 bisogna risolvere

$$10.000 = \frac{4548}{(1+i_2)} + \frac{4548}{(1+i_2)^2} + \frac{2000}{(1+i_2)^2}$$

Posto $x = (1+i_2)$

$$10.000\,x^2 - 4548\,x - 6548 = 0$$

$$(1+i_2) = x = \frac{4548 \pm \sqrt{4548^2 - 4 \times 10000 \times 6548}}{20.000}$$

$$= 1{,}068$$

$$i = (1+i_2)^2 - 1 = 0{,}14$$

b) è la più conveniente, a) è la peggiore