Lezione 8

<u>Modelli per i tassi d'interesse</u>

un modello $\rightarrow$ titoli a reddito fisso <u>zero coupon Bond</u>

un modello $\rightarrow$ interessi sugli scambi interbancari

LIBOR | Euribor

ogni giorno alle 12 vengono resi noti gli int. medi degli scambi interb. da una settimana fino ad un anno

$B(0,T) \leftarrow$ pagherò la somma 1 al tempo T

entrambi $B(\tau,T)$ $\quad 0 \leq \tau \leq T \leq T^*$

fisso noto $B(\tau,T) = B(\omega,\tau,T)$

$B(T,T) = 1$ $\quad \tau$ fisso $\rightarrow T \mapsto B(\tau,T)$ molto regolare

T fisso, $\quad \tau \mapsto B(\tau,T)$ forte oscillazione

$B(\tau,T)\Big|_{0 \leq \tau \leq T} \longrightarrow$ processo stocastico.

- la somma 1 al tempo T vale $\dfrac{1}{B(\tau,T)}$ al tempo T.

$$\frac{1}{B(\tau,T)} = e^{Y(\tau,T)(T-\tau)}$$

$$\boxed{\text{Yield} \quad Y(\tau,T) = \frac{-\log B(\tau,T)}{T-\tau}}$$

$$\frac{1}{B(\tau,T)} = 1 + L(\tau,T)(T-\tau)$$

$$\boxed{\text{Libor} \quad L(\tau,T) = \frac{1 - B(\tau,T)}{B(\tau,T)(T-\tau)}}$$

$B(\tau,T) \longleftrightarrow Y(\tau,T)$

$\updownarrow \quad \swarrow$

$L(\tau,T)$

Obbligazione biennale da 100 € con cedola semestrale al tasso del 6 % (annuo) venduta a 98 €

quanto rende?

λ

3 al tempo $\frac{1}{2}$ $\quad$ 3 al tempo 1 $\quad$ 3 al tempo $\frac{3}{2}$

103 al tempo 2

$$98 = 3e^{-\frac{\lambda}{2}} + 3e^{-\lambda} + 3e^{-\frac{3}{2}\lambda} + 103\, e^{-2\lambda}$$

$\tau < S < T$ $\quad$ quanto rendono tra S e T i titoli commercializzati in τ?

102 tra 1 an $\quad$ 105 tra due anni

$102(1+r_2) = 105$

---

1 al tempo T vale $\dfrac{1}{B(\tau,S)}$ in S $\quad \dfrac{1}{B(\tau,T)}$ al tempo T

$$\frac{1}{B(\tau,S)}\, e^{F(\tau,S,T)(T-S)} = \frac{1}{B(\tau,T)}$$

Forward rate $\quad \boxed{F(\tau,S,T) = \dfrac{\log B(\tau,S) - \log B(\tau,T)}{T-S}}$

$$\frac{1}{B(\tau,S)}\left(1 + L(\tau,S,T)(T-S)\right) = \frac{1}{B(\tau,T)}$$

$$\boxed{L(\tau,S,T) = \frac{B(\tau,S) - B(\tau,T)}{B(\tau,T)(T-S)}}$$

<u>Instantaneous forward rate</u>

$$\boxed{f(\tau,T) = \lim_{\Delta T \to 0^+} F(\tau,T,T+\Delta T) = -\frac{\partial}{\partial T}\log B(\tau,T)}$$

$$B(\tau,T) = e^{-\int_\tau^T f(\tau,u)\,du}$$

Instantaneous short rate

$$\boxed{r(\tau) = f(\tau,\tau) = \lim_{\Delta T \to 0^+} L(\tau,\tau+\Delta T)}$$

$B(\tau,T) \longleftrightarrow L(\tau,T)$

$\updownarrow$

$f(\tau,T) \longrightarrow r(\tau)$

da $r(\tau)$ non si può recuperare $B(\tau,T)$

(serve assegnare un modello)