Formula di Black-Scholes

$$dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t) = S_t(r\,dt + \sigma\,dW^*_t)$$

$$W^*_t = W_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)t$$

$\mathbb{P}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}^*$

$X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}^*)$ esiste un portafoglio replicante

$$V_0 = E^*\left[\frac{X}{e^{rT}}\right] \qquad V_t = E^*\left[\frac{X}{e^{r(T-t)}} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

---

Teorema Supponiamo $X = f(S_T)$, allora

$V_t = F(t, S_t)$ dove $F(t,x) =$

$$= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\,y}\right) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy$$

inoltre se $F$ è $C^1$ in $t$, $C^2$ in $x$

$$H_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) \qquad (\text{"delta hedging"})$$

---

$$S_T = \underbrace{S_t}_{\mathcal{F}_t\text{-mis.}} \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \underbrace{\sigma(W^*_T - W^*_t)}_{\text{indip. da } \mathcal{F}_t}\right)$$

$$E[g(X,Y) \mid \mathcal{G}] = G(X)$$

$X$ è $\mathcal{G}$-mis.
$Y$ indip. da $\mathcal{G}$

$G(x) = E[g(x,Y)]$

$$V_t = e^{-r(T-t)} E^*\left[f(S_t \cdot \exp(\ \ -\ -\ )) \mid \mathcal{F}_t\right] = F(t, S_t)$$

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)} E^*\left[f\left(x \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right)\right)\right] =$$

$$= e^{-r(T-t)} E^*\left[f\left(x \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\,Y\right)\right)\right]$$

---

$$dV_t = H^0_t\, r e^{rt}\,dt + H_t\,dS_t = dF(t, S_t) =$$

$$= \boxed{\frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t)}\,dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)\,dS_t + \boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t)\,d[S]_t}$$

$d[S]_t \to dt$

$$H_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)$$

---

Formula di Black-Scholes

$\phi$ fun. ripartizione della var. $N(0,1)$

$$C(t,x) = x\,\phi(d_1) - K e^{-r(T-t)}\phi(d_2)$$

$$P(t,x) = K e^{-r(T-t)}\phi(-d_2) - x\,\phi(-d_1)$$

$$d_{1,2} = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

---

inoltre il "delta" è $\phi(d_1)$ per il call
$-\phi(-d_1)$ per il put

---

"call" $\quad f(x) = (x-K)^+ \quad T - t = \vartheta$

$$C(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x e^{\sigma\sqrt{\vartheta}\,y - \frac{\sigma^2}{2}\vartheta} - K e^{-r\vartheta}\right)^+ \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy$$

$$(\ .\ .\ .\ .\ ) \geq 0 \iff y \geq -d_2$$

$$= \int_{-d_2}^{+\infty} \left(x e^{\sigma\sqrt{\vartheta}\,y - \frac{\sigma^2}{2}\vartheta} - K e^{-r\vartheta}\right) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy$$

II parte $\displaystyle = \int_{-d_2}^{+\infty} -K e^{-r\vartheta} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy = -K e^{-r\vartheta}\phi(d_2)$

I parte $\displaystyle x \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{\vartheta})^2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy = x \int_{-d_1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dz$

$$= x\,\phi(d_1)$$

---

Come si ottiene il "delta"?

$$\frac{\partial}{\partial x} C(t,x) \qquad \frac{d}{dx}\left(x e^{a} - b\right)^+ = e^{a}\, I_{\{xe^a > b\}}$$

L'unico "incognito" è $\sigma$

Volatilità "storica" stima statistica su dati passati

$t_{i+1} - t_i = d$

$$U_i = \log\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right) \text{ gaussiane indip.}$$

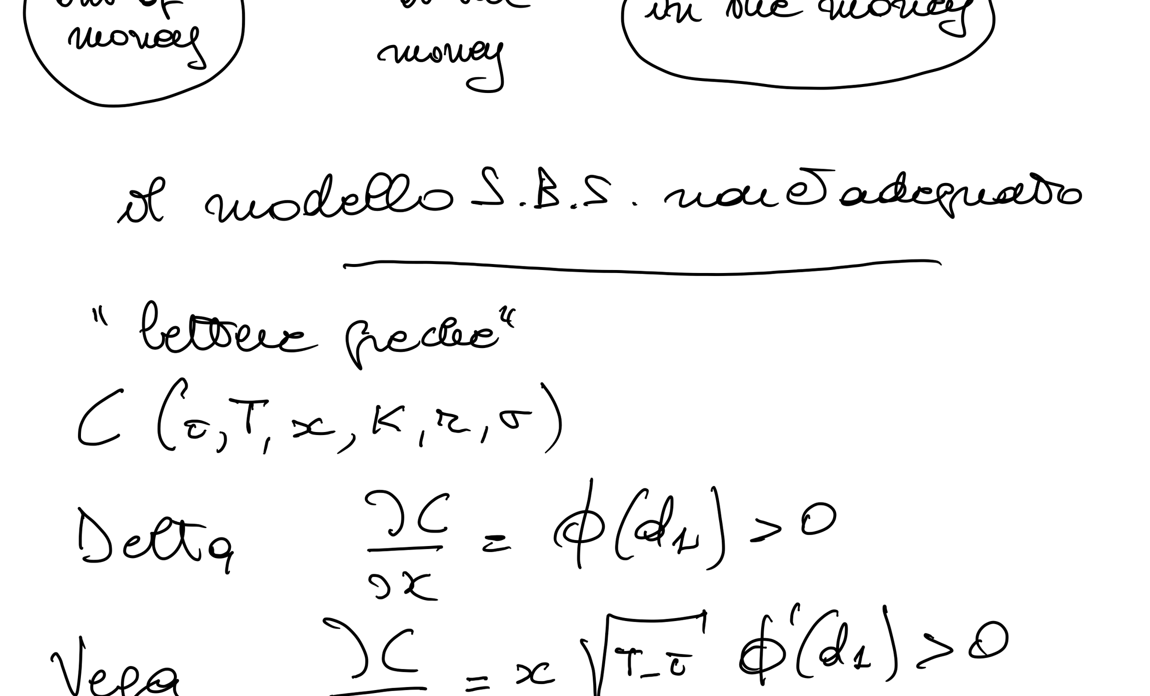
varianza $\sigma^2 \cdot d$

---

Volatilità implicita "si inverte la formula di B. S."

l'unico $\sigma$ che "accorda" i prezzi teorici ai prezzi di mercato

"smile" della volatilità




il modello di B.S. non è adeguato

---

"lettere greche"

$C(t, T, x, K, r, \sigma)$

Delta $\quad \dfrac{\partial C}{\partial x} = \phi(d_1) > 0$

Vega $\quad \dfrac{\partial C}{\partial \sigma} = x\sqrt{T-t}\,\phi'(d_1) > 0$

Gamma $\quad \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \dfrac{\phi'(d_1)}{\sigma x\sqrt{T-t}} > 0$

Theta $\quad \dfrac{\partial C}{\partial T} = \ .\ -\ -\ -\ > 0$

morale:
- per coprire un titolo si agisce sul mercato
- il premio dipende solo dalla volatilità ($\mu$ è sparito)

---

Metodo usato da Black-Scholes

* esiste un portafoglio replicante $V_t = F(t, S_t)$

** sotto una nuova prob. $e^{-rt}F(t, S_t)$ è una martingala

sotto questa nuova prob. l'eq. di $S$

$$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\,dW_t)$$

$$d\left(e^{-rt}F(t, S_t)\right) = e^{-rt}\left(-rF + \frac{\partial F}{\partial t} + rx\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(t, S_t)\,dt$$

$$+ e^{-rt}\frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)\,\sigma S_t\,dW_t$$

---

si ritrova una relazione "classica"

$$\begin{cases} -rF + \dfrac{\partial F}{\partial t} + rx\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\sigma^2 x^2}{2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 & 0 < t < T,\ x > 0 \\ F(T,x) = f(x) \end{cases}$$

allora $F(t, S_t)$ è il valore del port. replicante e $\dfrac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)$ è il "delta"

$e^{-rt}F(t, S_t)$ è una martingala

$$V_t = e^{rt} E^*\left[e^{-rT}F(T, S_T) \mid \mathcal{F}_t\right] = F(t, S_t)$$

---

prima generalizzazione

$$dS_t = S_t(\mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dW_t)$$

$$= S_t(r\,dt + \sigma(t)\,dW^*_t)$$

$\dfrac{S_t}{S_0}$ log-normale

$\displaystyle\int_0^t \sigma(s)\,dW^*_s$ gaussiana media 0 varianza $\displaystyle\int_0^t \sigma^2(s)\,ds$

formula tipo B. S.

$$\sigma^2(T-t) \longrightarrow \int_t^T \sigma^2(s)\,ds$$

$$\sigma\sqrt{T-t} \longrightarrow \sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)\,ds}$$

---

- modelli a volatilità locale
- " a volatilità stocastica