Modello Samuelson – Black–Scholes

$S^0_t = e^{rt}$ $dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t)$, $S(0) = S_0$ — volatilità

$dX_t = X_t(H_t\,dW_t + K_t\,dt)$ $H_t \in \Lambda^2$ $K_t \in \Lambda^1$
$X(0) = X_0 > 0$

soluzione unica $X_t = X_0 \cdot \exp\left(\int_0^t H_s\,dW_s + \int_0^t \left(K_s - \frac{H_s^2}{2}\right) ds\right)$
perché?

supponiamo $X(t,\omega) > 0$ $\forall t, \forall \omega$

$Y_t = \log X_t$

$dY_t = \frac{1}{X_t}\,dX_t - \frac{1}{2X_t^2}(dX_t)^2 = H_t\,dW_t + K_t\,dt - \frac{1}{2}H_t^2\,dt$

$$\boxed{Y_t = \log(X_0) + \int_0^t H_s\,dW_s + \int_0^t \left(K_s - \frac{H_s^2}{2}\right) ds}$$

$X_t = e^{Y_t} = X_0 \cdot \exp(\cdots)$

soluzione unica?

$Z_t = \exp\left(-\int_0^t H_s\,dW_s - \int_0^t \left(K_s - \frac{H_s^2}{2}\right) ds\right)$

$d(X_t \cdot Z_t) = 0$ $X_t Z_t = \text{cost.} = X_0$

$X_t = X_0 \cdot Z_t^{-1} \longrightarrow$

---

1) osserv. $H(t,\omega) \longmapsto h(t) \in L^2(0,T)$
$K(t,\omega) \longrightarrow k(t) \in L^1(0,T)$

$X_t = X_0 \cdot \exp\Big(\underbrace{\int_0^t h(s)\,dW_s + \int_0^t \left(k(s) - \frac{h(s)^2}{2}\right) ds}_{N\left(\int_0^t (k - \frac{h^2}{2})\,ds,\ \int_0^t h^2(s)\,ds\right)}\Big)$

si dicono lognormale di parametri m e σ^2 una v.a. $Y = e^Z$ $Z \sim N(m, \sigma^2)$

---

2) Ogni processo di Itô con $X(t,\omega) > 0$
per quasi ogni ω, $\forall t$
$t \mapsto X(t,\omega) > 0$

$dX_t = H_t\,dW_t + K_t\,dt = X_t\left(\frac{H_t}{X_t}\,dW_t + \frac{K_t}{X_t}\,dt\right)$
$\frac{H_t}{X_t} \in \Lambda^2$ $\frac{K_t}{X_t} \in \Lambda^1$

per quasi ogni ω, $\frac{1}{X(t,\omega)} \leq C(\omega)$

Modello S.B.S.

$S^0_t = e^{rt}$ $S_t = S_0 \cdot \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right)$ — moto Browniano geometrico

---

Portafoglio (strategia di portafoglio)

(H^0_t, H_t) prog. misurabili

$V_t = H^0_t S^0_t + H_t S_t$

Autofinanziato? $H^0_n S^0_n + H_n S_n = H^0_{n+1} S^0_n + H_{n+1} S_n$
$\Updownarrow$
$\Delta V_n = H^0_n \Delta S^0_n + H_n \Delta S_n$

Autofinanziato se
$dV_t = H^0_t\,dS^0_t + H_t\,dS_t$ o meglio

$$\boxed{H^0_t S^0_t + H_t S_t = V_t = V_0 + \int_0^t H^0_s\,dS^0_s + \int_0^t H_s\,dS_s}$$

$\Delta V_n = H^0_n \Delta S^0_n + H_n \Delta S_n \iff \Delta\tilde{V}_n = H_n \Delta\tilde{S}_n$

Proposizione: sono equivalenti

a) $dV_t = H^0_t\,dS^0_t + H_t\,dS_t$
b) $d\tilde{V}_t = H_t\,d\tilde{S}_t$

$\tilde{V}_t = \frac{V_t}{S^0_t} = \frac{V_t}{e^{rt}}$
$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{e^{rt}}$ $\tilde{S}^0_t = 0$

a) $\Rightarrow$ b)

$d(\tilde{V}_t) = d(e^{-rt} V_t) = e^{-rt}\,dV_t - re^{-rt} V_t\,dt =$
$= e^{-rt}(\cancel{re^{rt} H^0_t\,dt} + H_t\,dS_t) - re^{-rt}(\cancel{H^0_t e^{rt}} + H_t S_t)\,dt =$
$= H_t(e^{-rt}\,dS_t - re^{-rt}\,dt) = H_t\,d\tilde{S}_t$ b) $\Rightarrow$ a)

V_0 e (H_t) determinano H^0_t (prog. misurabile)

$H^0_t + H_t\tilde{S}_t = V_0 + \int_0^t H_s\,d\tilde{S}_s$

N.A. $\iff$ esistenza prob. martingala equivalente

$\Leftarrow$ facile sempre vero

$\Rightarrow$ costruiamo esplicitamente la prob. martingala col teorema di Girsanov

---

completezza del mercato: conseguenza del teorema di rappresentazione delle martingale nella filtrazione browniana.

Teorema di rappresentazione:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ generata dal processo di Wiener (anche d-dimensionale) $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^W_t = \sigma(W_s, s \leq t)$

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_T = \mathcal{F}^W_T$

Ogni $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si scrive
$X = E[X] + \int_0^T H_s\,dW_s$ con un unico $H_s \in M^2$ $E\left[\int_0^T H_s^2\,ds\right] < +\infty$
$\Updownarrow$
ogni martingala di quadrato integrabile è della forma

$M_t = M_0 + \int_0^t H_s\,dW_s$ $M_t = E[M_T \mid \mathcal{F}_t]$

Teorema di Girsanov $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
$(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ W_t un $\mathcal{F}_t$-moto browniano
$\mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{F}^W_t$ $(W_t - W_s)$ indip. da $\mathcal{F}_s$ $s < t$.

$H_s \in \Lambda^2$ $dL_t = L_t H_t\,dW_t$
$L_0 = 1$
~~cioè~~ $L_t = \exp\left(\int_0^t H_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\,ds\right)$

in generale $E[L_T] \leq 1$

Supponiamo di sapere $E[L_T] = 1$
sia Q con $\frac{dQ}{dP} = L_T$ allora sotto Q
$W^*_t = \left(W_t - \int_0^t H_s\,ds\right)$ è un processo di Wiener

Condizione di Novikov:

se $E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T H_s^2\,ds\right)\right] < +\infty \Rightarrow E[L_T] = 1$

Se $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^W_t$, tutte le prob. equivalenti si ottengono in questo modo

Idea della dimostrazione:

$L_T = \frac{dQ}{dP}$ $L_t = E\left[\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t\right]$ $L_0 = 1$

martingala $dL_t = K_t\,dW_t = L_t\left(\frac{K_t}{L_t}\,dW_t\right)$

$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$

$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\mu - r)\,dt + \sigma\,dW_t) =$
$= \sigma\tilde{S}_t\,d\Big[\underbrace{W_t + \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) ds}_{W^*_t}\Big]$

porre la prob. Q con

$\frac{dP^*}{dP} = \exp\left(-\frac{(\mu - r)}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T\right)$

sotto P^*, $W^*_t = W_t + \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) ds$ è un proc. di Wiener

$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t\,dW^*_t$, cioè $\tilde{S}_t$ è una martingala sotto P^*

Osservazione importante

$\mathcal{F}^W_t = \mathcal{F}^S_t = \left(\mathcal{F}^{\tilde{S}}_t = \mathcal{F}^{W^*}_t\right)$
$\uparrow$ matematica $\uparrow$ economica

Teorema: Ogni $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P^*)$ è replicabile da un portafoglio autofinanziato con $V_0 = E^*[\tilde{X}] = e^{-rT} E^*[X]$

e tale che $V_t = E^*\left[\frac{X}{e^{r(T-t)}} \mid \mathcal{F}_t\right]$

$\tilde{X} = E^*[\tilde{X}] + \int_0^T K_s\,dW^*_s =$

$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t\,dW^*_t$
$dW^*_t = \frac{1}{\sigma\tilde{S}_t}\,d\tilde{S}_t$

$= V_0 + \int_0^T \left(\frac{K_s}{\sigma\tilde{S}_s}\right) d\tilde{S}_s = V_0 + \int_0^T H_s\,d\tilde{S}_s = \tilde{V}_T$

$\tilde{V}_t = E^*[\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t] = E^*\left[\frac{X}{e^{rT}} \mid \mathcal{F}_t\right]$

quindi
$V_t = E^*\left[\frac{X}{e^{r(T-t)}} \mid \mathcal{F}_t\right]$

$V_0 = E^*\left[\frac{X}{e^{rT}}\right] \leftarrow$ prezzo di non arbitraggio

a) come calcolare effettivamente V_0 (e V_t)

b) come calcolare effettivamente $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$

$X = (S_T - K)^+$ $X = (K - S_T)^+$

formule di Black–Scholes