Lezione 3 - I

Dimostr. dei teoremi fondamentali nel caso in cui $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$

$P = (p_1, \dots, p_K)$ $\quad p_i = P(\omega_i) \geq 0$

$p_1 + \dots + p_K = 1$ $\quad p_i > 0 \ , \forall i$

$Q \quad Q(\omega_i) > 0, \forall i \Rightarrow Q \sim P$

$X \sim$ punto di $\mathbb{R}^K$

$X(\omega_1), \dots, X(\omega_K)$ $\quad \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{K} X(\omega_i) Y(\omega_i)$

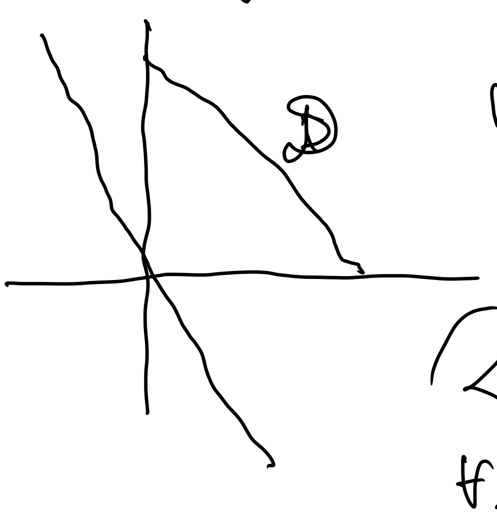
Dim. Th 1 $\quad$ N.A. $\Rightarrow$ esistenza prob. martingala equivalente

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{n=1}^{N} H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n \ \Big| \ (H_n)_{n=1}^{N} - \text{prev.} \right\}$$

"valori finali di tutti i port. autofinanziati con $V_0 = 0$"

$\mathcal{C}$ sottospazio di $\mathbb{R}^K$

$\mathcal{D} = \{ Y \mid Y(\omega_i) \geq 0, \ Y(\omega_1) + \dots + Y(\omega_K) = 1 \}$ conv. compatto



N.A. $\Rightarrow \mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$

$\exists Z \in \mathbb{R}^K \quad \exists \alpha$

$\langle X, Z \rangle < \alpha < \langle Y, Z \rangle$

$\forall X \in \mathcal{C} \qquad \forall Y \in \mathcal{D}$

$\langle X, Z \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathcal{C} \qquad \alpha > 0$

$Z(\omega_i) > 0 \quad \forall i \qquad Y = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$

posso supporre $Z(\omega_1) + \dots + Z(\omega_K) = 1$

$Z \longleftrightarrow Q \qquad Q \sim P$

$E^Q[X] = 0 \quad \forall X \in \mathcal{C}$, cioè

$E^Q\left[\sum_{n=1}^{N} H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n\right] = 0$ $\qquad 1 \leq j \leq n \qquad A_j \in \mathcal{F}_{j-1}$

$$H_n = \begin{cases} 0 & n \neq j \\ I_{A_j} & n = j \end{cases}$$

$\downarrow$

$E^Q[I_{A_j} \cdot \Delta \tilde{S}_j] = 0 \qquad \forall$ scelta di A_j

$\Leftrightarrow \qquad E^Q[\Delta \tilde{S}_j \mid \mathcal{F}_{j-1}] = 0$

$\Rightarrow Q \in \mathcal{M}^e$

Th. 2 $\quad$ Se X non è replicabile, prezzo un prezzo di non arbitraggio

$E^Q[\tilde{X}] \qquad Q \in \mathcal{M}^e$

$\exists Q^* \in \mathcal{M}^e$ con $E^{Q^*}[\tilde{X}] > E^Q[\tilde{X}]$

$\mathcal{V} = \mathcal{C} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{1} = \left\{ c + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta \tilde{S}_n \right\}$

$\tilde{X} \notin \mathcal{V} \qquad$ separiamo $\mathcal{V}$ da $\tilde{X}$

esistono $Z \in \mathbb{R}^K$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\langle V, Z \rangle < \alpha < \langle \tilde{X}, Z \rangle$

$V \in \mathcal{V} \quad \overset{\shortparallel}{0} \qquad \alpha > 0 \qquad \Rightarrow \langle \tilde{X}, Z \rangle > 0$

$Z(\omega_1) + \dots + Z(\omega_K) = 0 \qquad (1, \dots, 1)$

$Q^*(\omega_i) = \underbrace{Q(\omega_i) + \varepsilon Z(\omega_i)}_{V_0}$ $\qquad \varepsilon > 0$ abb. piccolo

$Q^* \sim Q \sim P$

$E^{Q^*}\left[\sum H_n \Delta \tilde{S}_n\right] = 0 \qquad Q^* \in \mathcal{M}^e$

$E^{Q^*}[\tilde{X}] = E^Q[\tilde{X}] + \varepsilon \langle \tilde{X}, Z \rangle > E^Q[\tilde{X}]$

$\Rightarrow$ conseguenze $\quad$ II teor. fondamentale

il mercato è completo $\Longleftrightarrow \# \mathcal{M}^e = 1$

X è replicabile $\qquad E^Q[\tilde{X}]$ non dipende da $Q \in \mathcal{M}^e$

X non replicabile

$Q^1, Q^2 \in \mathcal{M}^e$

$0 < t < 1$

~~(...)~~

$t Q^1 + (1-t) Q^2 \in \mathcal{M}^e$

$\pi_0 = \sup_{Q \in \mathcal{M}^e} E^Q[\tilde{X}]$

se V è un portafoglio di copertura $(\tilde{V}_N \geq \tilde{X})$

$V_0 \geq \pi_0 \qquad V_0 = E^Q[\tilde{V}_N] \leq E^Q[\tilde{X}]$

$\exists$ un portafoglio di copertura con $V_0 = \pi_0$

Proposizione

X è "copribile" a costo 0 $\Longleftrightarrow E^Q[\tilde{X}] \leq 0$

$\forall Q \in \mathcal{M}^e$

$\exists$ un port. con $V_0 = 0$

e $V_N \geq X$

$\mathcal{A} =$ "contratti aleatori copribili a costo 0"

$\hookrightarrow$ cono $\qquad \tilde{X} \in \mathcal{A}, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda \tilde{X} \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}^0 =$ "cono polare" $= \{ Y \in \mathbb{R}^K \mid \langle Y, \tilde{X} \rangle \leq 0 \ \forall \tilde{X} \in \mathcal{A} \}$

Teorema bipolare

$\mathcal{A}^{00} =$ inviluppo convesso chiuso di $\mathcal{A} =$

$= \mathcal{A}$

$\tilde{X} \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \forall Y \in \mathcal{A}^0 \quad \langle Y, \tilde{X} \rangle \leq 0$

$Y(\omega_i) \geq 0 \quad \forall i \qquad Y(\omega_1) + \dots + Y(\omega_n) = 1$

$\hookrightarrow Q$ ass. continua rispetto a P

$\mathcal{A}^0 = \mathcal{M}^a \leftarrow$ prob. martingale assolutamente continue

X è copribile a costo 0 $\Longleftrightarrow E^Q[\tilde{X}] \leq 0$

$\forall Q \in \mathcal{M}^a \supseteq \mathcal{M}^e$

$\mathcal{M}^e$ denso in $\mathcal{M}^a$