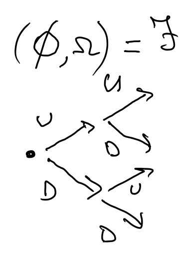
Lezione 2: modelli a tempi finiti

$\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, N\}$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ filtrazione

$(\emptyset, \Omega) = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \qquad \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$



$\omega = \{U, D, D, \dots\}$

$\Omega = \{U, D\}^N$

$\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$

$\mathcal{F}_1 = U\!-, D\!-, \emptyset, \Omega$

$\mathcal{F}_2 = UU\!-, UD\!-, DU\!-, DD\!-, \emptyset, \Omega$

---

attivo senza rischio — Bond — $S_n^0 = B_n = (1+r)^n$

attivo con rischio — Stock — $S_n \leftarrow$ adattato

potrebbe essere $(S_n^1, \dots, S_n^d)$

$(X_n)_{n=0}^N$ <u>adattato</u> X_n è $\mathcal{F}_n$-mis.

<u>prevedibile</u> X_n è $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile

strategie di portafoglio

$(H_n^0, H_n)_{n=1}^N \rightarrow$ <u>prevedibile</u> $\qquad H(n,\omega) \in \mathbb{R}$

all'istante $(n-1)$ si decidono (H_n^0, H_n)

$V_n = H_n^0 S_n^0 + H_n S_n$

<u>autofinanziato</u> se

$$H_n^0 S_n^0 + H_n S_n = H_{n+1}^0 S_n^0 + H_{n+1} S_n$$

$\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ $\Updownarrow$

$$\Delta V_n = V_n - V_{n-1} = H_n^0 \Delta S_n^0 + H_n \Delta S_n$$

<u>Attualizziamo</u> rispetto a S_n^0

$\tilde{S}_n = \dfrac{S_n}{(1+r)^n} \qquad \tilde{V}_n = \dfrac{V_n}{S_n^0} = \dfrac{V_n}{(1+r)^n}$

$\tilde{S}_n^0 = 1 \qquad \boxed{H_n^0 + H_n \tilde{S}_n = H_{n+1}^0 + H_{n+1} \tilde{S}_n}$

$\Delta \tilde{V}_n = H_n \Delta \tilde{S}_n$

Il capitale iniziale V_0 e $(H_n)_{n=1}^N$

determinano (H_n^0) (chiaramente prevedibile)

$H_n^0 + H_n \tilde{S}_n = \tilde{V}_n = V_0 + \sum_{h=1}^{n} H_h \Delta \tilde{S}_h$

$H_n^0 = V_0 + \sum_{h=1}^{n-1} H_h \Delta \tilde{S}_h - H_n \tilde{S}_{n-1}$ è $\mathcal{F}_{n-1}$-mis.

<u>Arbitraggio</u>

$V_0 = 0 \qquad V_N \geq 0 \qquad P(V_N > 0) > 0$

dipende dalla classe di equiv. di P

<u>Ipotesi</u> N.A. il mercato non consente arbitraggi

<u>Primo Teorema Fondamentale</u>

(Dalang - Morton - Willinger)

N.A. $\iff$ $\exists\, Q \sim P$ sotto la quale $(\tilde{S}_n)_{n=1}^N$ è una martingala

si può prendere Q con $\dfrac{dQ}{dP} \in L^\infty$

$\Leftarrow$ facile sempre vero

$\Rightarrow$ difficile

$(M_n)_{n=0}^N$ $\quad$ * M_n è $\mathcal{F}_n$-mis. e integrabile

** $E[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$

$\Updownarrow$

$\boxed{E[\Delta M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0}$

$(K_n)_{n=1}^N$ <u>prevedibile</u>

$R_n = M_0 + \sum_{h=1}^{n} K_h \Delta M_h \leftarrow$ ancora una mart.

$E[\Delta R_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = E[K_n \cdot \Delta M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$

$= K_n \cdot E[\Delta M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ $\qquad K_n \in L^\infty$; $\ M_n \in L^2 \ (\forall n)$; $\ K_n \in L^2 \ (\forall n)$

$\Leftarrow$ supponiamo di avere un portaf. di arbitraggio $V_n = H_n^0 S_n^0 + H_n S_n$

posso supporre $(H_n, H_n^0, S_n) \in L^2$

costruisco la <u>prob. martingala</u> Q con $\dfrac{dQ}{dP} \in L^\infty$

sotto Q, $\tilde{V}_n$ è una martingala

$E^Q[\tilde{V}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = E^Q[H_n \Delta \tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$

$= H_n E^Q[\Delta \tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0$

$E^Q[\tilde{V}_N] = E^Q[V_0] = 0$

$\tilde{V}_N \geq 0 \qquad E[\tilde{V}_N] = 0 \Rightarrow \tilde{V}_N \equiv 0$

X attivo aleatorio una v.a. $\mathcal{F}_N$-mis.

portafoglio di <u>copertura</u>

$V_N \geq X$

portafoglio <u>replicante</u>

$V_N = X$

Il mercato si dice <u>completo</u> se ogni attivo aleatorio (limitato) è <u>replicabile</u>

<u>II</u> teorema fondamentale:

supponiamo N.A.

il mercato è completo $\iff$ la prob. martingala equivalente è unica.

$\mathcal{M}^e = \{Q \sim P \mid (\tilde{S}_n) \text{ è una } Q\text{-martingala}\}$

N.A. $\iff$ $\mathcal{M}^e \neq \emptyset$

completezza $\iff$ $\# \mathcal{M}^e = 1$

$\Longrightarrow$ facile

X (limitato) $\qquad V_n$ port. replicante

$P_1, P_2 \in \mathcal{M}^e$

$E^{P_1}[\tilde{X}] = E^{P_1}[\tilde{V}_N] = V_0 \ (\tilde{V}_0)$

$\parallel$

$E^{P_2}[\tilde{X}] = V_0 \qquad \Rightarrow P_1 \equiv P_2$

X attivo aleatorio

commercializzato all'ist. n a un prezzo π_n

$\pi_N = X \qquad (\pi_n)_{n=0}^N$

è un sistema di prezzi di <u>non arbitraggio</u>

se il mercato "allargato"

(S_n^0, S_n, π_n) non consente arbitraggio

$\exists$ una prob. mart. equivalente

$(\tilde{S}_n, \tilde{\pi}_n)$ $\quad$ * si sceglie $Q \in \mathcal{M}^e$

$\tilde{\pi}_n = E^Q[\tilde{X} \mid \mathcal{F}_n]$

cioè $\quad \pi_n = E^Q\left[\dfrac{X}{(1+r)^{N-n}} \,\Big|\, \mathcal{F}_n\right]$

mercato completo

prezzo di non arb. è unico $\quad \pi_0 = E^Q\left[\dfrac{X}{(1+r)^N}\right]$

non completo

$E^Q[\tilde{X}]$ al variare di $Q \in \mathcal{M}^e$

<u>Teorema</u>: supponiamo $\mathcal{M}^e \neq \emptyset$

se X <u>non replicabile</u> se

$\pi_0 = E^Q[\tilde{X}]$ un prezzo di non arbitraggio

$\exists\, Q^* \in \mathcal{M}^e$ con $E^{Q^*}[\tilde{X}] > \pi_0$

<u>prezzi</u> $\qquad$ mer. completo (se X è replicabile)

$Q^1, Q^2 \in \mathcal{M}^e$

$\tau Q^1 + (1-\tau) Q^2 \quad (0 < \tau < 1) \Rightarrow \in \mathcal{M}^e$

<u>Teorema</u>: se X non replicabile

se $x_0 = \sup_{Q \in \mathcal{M}^e} E^Q[\tilde{X}]$

esiste un portafoglio <u>di copertura</u> con

$V_0 = x_0 \qquad$ questo è un prezzo di arbitraggio

caso banale $\quad \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$