Lezione 16

Misure di rischio "in pratica"

$$\rho^*(X) = \sup_{Q \ll P} \left(E^Q[-X] - \alpha(Q) \right)$$

$\alpha : Q \longmapsto]-\infty, +\infty]$ $\quad \inf_{Q \ll P} \alpha(Q) \in \mathbb{R}$

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E^Q[-X] \qquad \mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$$

$*$ $TCE_\alpha(X) = E[-X \mid X \le q_\alpha(X)]$ Tail Conditional Expectation

$**$ $\rho_\alpha(X) = \sup \left\{ E^Q[-X] \mid Q \ll P \text{ e } \frac{dQ}{dP} \le \frac{1}{\alpha} \right\}$

$***$ $AVaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_u(X)\,du$

$P\{X \le q_\alpha(X)\} \ge \alpha \qquad A = \{X \le q_\alpha(X)\}$

Proposizione 1 $\quad TCE_\alpha(X) \le \rho_\alpha(X)$ e sono uguali se $P\{X \le q_\alpha(X)\} = \alpha$

Proposizione Vale la formula

$$AVaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{\{X \le q_\alpha(X)\}} (-X)\,dP$$

se $P\{X \le q_\alpha(X)\} = P(A) = \alpha$

$$AVaR_\alpha(X) = TCE_\alpha(X) = \rho_\alpha(X)$$

Esempio

X		Y	
-100.000	prob. 0.01	-50.000	0.005
valore atteso		-200.000	0.0025
		-600.000	0.0025

$VaR(X) = 100.000 \qquad VaR(Y) = 50.000$

$TCE(X) = 100.000 \qquad TCE(Y) = 225.000$

Dim. Proposizione 1 $\qquad A = \{X \le q_\alpha(X)\} \quad P(A) \ge \alpha$

$$TCE_\alpha(X) = \frac{1}{P(A)} \int_A -X\,dP = \int_\Omega (-X) \frac{I_A}{P(A)}\,dP$$

$\frac{I_A}{P(A)} \to \frac{dQ}{dP} \qquad \frac{dQ}{dP} \le \frac{1}{\alpha}$

$TCE_\alpha(X) \le \rho_\alpha(X)$

Q con $\frac{dQ}{dP} \le \frac{1}{\alpha} \qquad P(A) = \alpha$

$$E^Q[-X] = \frac{1}{\alpha} \int_A -X\,dP + \int_A -X \Big(\underbrace{\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha}}_{\le 0} \Big) dP + \int_{A^c} -X \frac{dQ}{dP}\,dP \le$$

$$\le TCE_\alpha(X) - \underbrace{q_\alpha(X) \int_A \left(\frac{dQ}{dP} - \frac{1}{\alpha} \right) dP - q_\alpha(X) \int_{A^c} \frac{dQ}{dP}\,dP}_{=0}$$

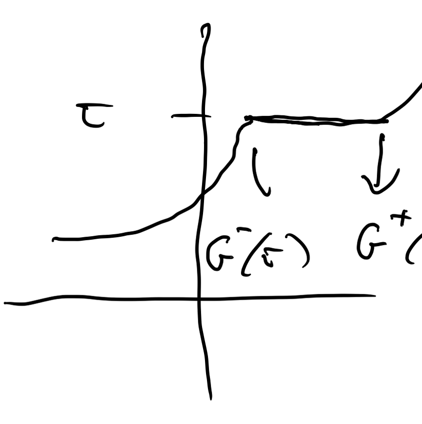
Dimostrazione prop. 2 formula

$$AVaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{\{X \le q_\alpha(X)\}} (-X)\,dP$$

F fun. ripartizione di X

$G^+(\tau) = \inf\{x \mid F(x) > \tau\}$

$G^-(\tau) = \inf\{x \mid F(x) \ge \tau\}$



$VaR_u(X) = -G^-(u)$

se Y è uniforme su $[0,1]$

$G^+(Y)$ e $G^-(Y)$ hanno distr. F

$$\int_0^\alpha q_u(X)\,du = \int_{\{X \le q_\alpha(X)\}} X\,dP$$

$$\int_{]0,\alpha]} G^-(u)\,du = \int_{]-\infty, G^-(\alpha)]} x\,dF(x)$$

$G^- :]0,\alpha] \longrightarrow]-\infty, G^-(\alpha)]$

immagine della misura di Lebesgue su $[0,1]$ mediante G^- è la prob. associata ad F

Vero problema: trovare una prob. che realisticamente descrive il mercato

Metodo storico

. . . . . dati su 500 giorni passati

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{500}\} \qquad X(\omega_1)$
$X(\omega_2)$

— non si accorge delle variazioni del mercato

— costruire un modello . . . .

raccomandazione del SEC

70% — metodo storico

30% — sue scenari "critici"

"Stress test"

Dipendenza tra variabili aleatorie

$X \qquad Y$

$F_1(\cdot) \qquad F_2(\cdot) \qquad F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$

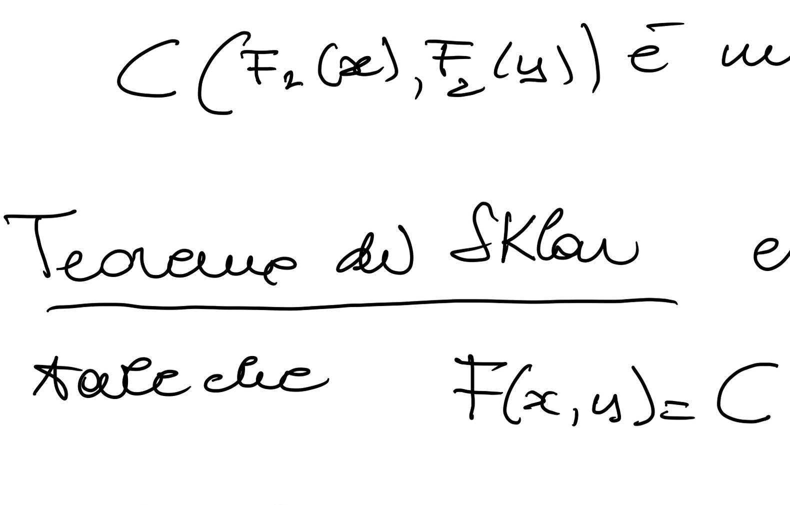
$x_1 < x_2 \quad y_1 < y_2 \quad F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \ge 0$

$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$

$F(x, +\infty) = F_1(x) \qquad F_2(y) = F(+\infty, y) \;/\; F(+\infty, +\infty) = 1$

Copula $\quad C : \mathbb{R}^2 \mapsto [0,1]$

è la f. ripartizione di una coppia (Z, W) dove Z e W sono uniformi su $[0,1]$



Esercizio facile

$C(F_1(x), F_2(y))$ è una fun. ripartizione su $\mathbb{R}^2$

Teorema di Sklar $\quad$ esiste una copula C tale che $\quad F(x,y) = C(F_1(x), F_2(y))$

se F_1 e F_2 sono continue, C è univocamente determinata

Identificare la "giusta" copula