Lezione 15

Teorema $\rho^*: L^\infty \mapsto \mathbb{R}$ misura convessa di rischio

Sono equivalenti

1) ρ^* ha la proprietà di Fatou

2) $\mathcal{A}^*$ chiuso per $\sigma(L^\infty, L^1)$

3) $\exists\, \alpha: \mathcal{Q} \mapsto]-\infty, +\infty]$ $\quad \inf_{Q \ll P} \alpha(Q) \in \mathbb{R}$

$$\rho^*(X) = \sup_{Q \ll P} \left(E^Q[-X] - \alpha(Q) \right)$$

4) si può prendere

$$\alpha_{\min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}^*} E^Q[-X]$$

$(1) \Leftrightarrow (2)$ $\qquad 4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 4$

$4) \Rightarrow 3)$ $\quad \exists\, k$ accettabile

$$\alpha_{\min}(Q) \geq -k$$

$$\inf_{Q \ll P} \alpha_{\min}(Q) > -\infty$$

$3) \Rightarrow 2)$ $\quad$ Krein-Smulian

$\forall N,$ $\quad \mathcal{A}^* \cap B_N$ chiuso per $\sigma(L^\infty, L^1)$

$\|X_n\|_\infty \leq N$ $\quad X_n$ accettabili $\quad X_n \to X\ \sigma(L^\infty, L^1)$

anche X accettabile

$\forall Q \ll P$ $\quad E^Q[-X_n] - \alpha(Q) \leq 0$

$$= \int_\Omega (-X_n) \underbrace{\frac{dQ}{dP}}_{\in L^1} dP \longrightarrow \int -X \frac{dQ}{dP} dP \leq 0$$

$1) \Rightarrow 2)$ $\quad \forall N, \quad \mathcal{A}^* \cap B_N$ chiuso per $\sigma(L^\infty, L^1)$ $=$ chiuso convergenza in prob.

$\|X_n\|_N \leq N$ $\quad X_n \mapsto X$ p.c.

$$\rho^*(X) \leq \liminf_n \rho^*(X_n)$$

$2) \Rightarrow 1)$ $\quad \exists\, X_n$ con $\|X_n\|_\infty \leq N$

$X_n \downarrow X$ $\quad$ però $\sup_n \rho^*(X_n) < \rho^*(X)$, $\sup_n \rho^*(X_n) = 0$

$\rho^*(X_n) \uparrow 0$ $\quad$ però $\rho^*(X) > 0$

X_n accettabili $\quad X_n \mapsto X$ in prob $\quad \sigma(L^\infty, L^1)$

però X non accettabile

$2) \Rightarrow 4)$ $\quad$ Teorema di separazione di Hahn Banach su L^∞ con $\sigma(L^\infty, L^1)$

$$\alpha_{\min}(Q) = \sup_{Y \in \mathcal{A}^*} E^Q[-Y]$$

$X + \rho^*(X)$ è accettabile $\qquad Q \ll P$

$E^Q[-X] - \rho^*(X) \leq \alpha_{\min}(Q)$

$\rho^*(X) \geq E^Q[-X] - \alpha_{\min}(Q)$

$$\rho^*(X) \geq \sup_{Q \ll P} \left(E^Q[-X] - \alpha_{\min}(Q) \right)$$

basta mostrare che, se $m > \sup_{Q \ll P} \left(E^Q[-X] - \alpha_{\min}(Q) \right)$

allora $(X+m)$ accettabile

Supponiamo non vero

$\exists\, Z \in L^1$

$$E[Z(X+m)] < \inf_{Y \in \mathcal{A}^*} E[ZY]$$

oss. $Z \geq 0$ p.c. $\quad \forall \lambda > 0, \quad Y = k + \lambda I_A$ accettabile

$A = \{Z < 0\}$

se $P(A) > 0$ $\quad -\infty$

supponiamo $E[Z] = 1$ $\qquad Q^Z = Z \cdot P$

$$\inf_{Y \in \mathcal{A}^*} E[ZY] = -\alpha_{\min}(Q^Z)$$

$$m + E^Z[X] < -\alpha_{\min}(Q^Z)$$

$$m < E^{Q_Z}[-X] - \alpha_{\min}(Q^Z)$$

però $m > \sup_{Q \ll P} \left(E^Q[-X] - \alpha_{\min}(Q) \right)$

L^0 – tutte le v.a. $\quad$ convergenza in probabilità

Proposizione $\quad$ Supponiamo esista ρ coerente $\rho: L^0 \mapsto \mathbb{R}$: allora esiste $G: L^0 \mapsto \mathbb{R}$ lineare positivo $\quad (X \geq 0,\ G(X) \geq 0)$

Teorema Hahn-Banach (Brezis)

$p: E \mapsto \mathbb{R}$ $\qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

$\qquad\qquad p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \lambda > 0$

supponiamo esista V e g lineare $g: V \mapsto \mathbb{R}$

$$g(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in V$$

$\exists\, f$ lineare su tutto E, $\quad f|_V = g$

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in E$$

$p(X) = \rho(X)$ $\qquad V$ costanti

$\rho(k) = -k$ $\qquad f(k) = -k$ $\quad$ – prolunghiamo su L^0

se $X \geq 0$, $\rho(X) \leq 0$ $\quad$ quindi $f(X) \leq 0$

$G(X) = f(-X)$ $\qquad$ lineare positivo

Proposizione 2 $\quad G: L^0 \mapsto \mathbb{R}$ lineare positivo allora è continuo

---

negliamolo $\quad \exists\, \varepsilon > 0, \quad X_n \mapsto 0$ in prob

$|G(X_n)| \geq \varepsilon$

$G(X_n) \geq \varepsilon$ $\qquad X_n \geq 0 \quad (\max(X_n, 0))$

$\exists\, n_k$ $\qquad P(X_{n_k} > 2^{-k}) < 2^{-k}$

$X = \sum_n X_{n_k}$ $\quad$ è a valori finiti

$G(X) \geq G(X_{n_1} + \dots + X_{n_k}) \geq k\varepsilon \qquad \forall k$

$G(X) = +\infty$

Teorema $\quad$ Se $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è non atomico, il duale di L^0 è banale (il solo $\equiv 0$)

$G: L^0 \mapsto \mathbb{R}$ lineare continuo

$\exists\, I_A$ con $\quad G(I_A) = 1$

$A = A' \cup A''$ $\qquad P(A') = P(A'') = \frac{P(A)}{2} \qquad A' \cap A'' = 0$

$\max\left(G(I_{A'}), G(I_{A''})\right) \geq \frac{1}{2}$

$A_0 = A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \dots \qquad P(A_n) = \frac{P(A)}{2^n}$

$G(I_{A_n}) \geq 2^{-n}$

$X_n = 2^n \cdot I_{A_n}$

$X_n \mapsto 0$ in prob.

$G(X_n) \geq 1$

---

se voglio definire $\rho: L^0 \mapsto$ misura di rischio coerente

$\rho(X) = +\infty$ $\quad \rightarrow$ fallimento!

$\rho(X) = -\infty$ $\quad$ non ha senso economico

$$\rho: L^\infty \longmapsto]-\infty, +\infty]$$
