Lezione 14 — **Misure di rischio**

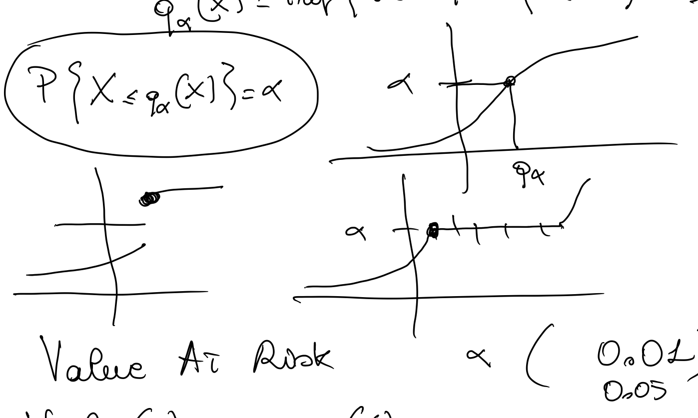
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ scenario

posizione $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

quantile $0<\alpha<1$

$$q_\alpha(X) = \inf\{\tau \in \mathbb{R} \mid P\{X \le \tau\} \ge \alpha\}$$

$$P\{X \le q_\alpha(X)\} = \alpha$$



Value At Risk α (0.01, 0.05)

$$VaR_\alpha(X) = -q_\alpha(X)$$

$$VaR(X) = 1.000.000 \qquad \alpha = 0.01$$

Ho stimato con metodi statistici

$$P\{X \le -1000.000\} \le 0.01$$

X è accettabile $\iff VaR(X) \le 0$

$*$ è definito su tutte le v.a.

1) $X \ge 0, \quad VaR(X) \le 0$
2) $VaR(\lambda X) = \lambda\, VaR(X) \qquad \lambda > 0$
3) $VaR(X+k) = VaR(X) - k$

$$VaR(X) = \inf\{\beta \in \mathbb{R} \mid X+\beta \text{ è accettabile}\}$$

min

Non è subadditivo (non spinge alla diversificazione)

X prestito 100.000 € prob. 0.8% (0.008) di fallire

$VaR(X) = 0$

Y 2 prestiti da 50.000 € a due debitori con prob. 0,8% di fallire indipendenti

$0.016 - (0.08)^2 \leftarrow$ prob. che uno dei due fallisce

$VaR(Y) = 50.000$

Su quali spazi lavorare?

$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \qquad \|X\|_\infty = \inf\{\tau : |X(\omega)| \le \tau \text{ p.c.}\}$

$L^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \to$ convergenza in prob.

$$d(X,Y) = E\left[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right]$$

$X_n \to X$ in prob. $\iff$ da ogni sottosucc. si estrae sottosotto succ. convergente p.c.

$L^\infty \qquad \mathcal{Q} = \{Q \ll P\} \sim \{h \in L^1_+ : \int_\Omega h\, dP = 1\}$

Misura coerente di rischio

$$\rho : L^\infty \mapsto \mathbb{R}$$

1) $X \ge 0 \Rightarrow \rho(X) \le 0$
2) $\rho(X+k) = \rho(X) - k$
3) $\lambda \ge 0, \quad \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
4) $\rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$

1) $\iff X \ge Y, \ \rho(X) \le \rho(Y)$

$X = Y + (X-Y) \qquad \rho(X) \le \rho(Y) + \rho(X-Y) \le \rho(Y)$

3) + 4) $\Rightarrow \rho$ è convessa

Misure convesse di rischio

$\rho^* : L^\infty \mapsto \mathbb{R}$

1) $X \ge Y, \quad \rho^*(X) \le \rho^*(Y)$
2) $\rho^*(X+k) = \rho^*(X) - k$
3) ρ^* è convessa

~~$\rho^*(\lambda X) = \lambda \rho^*(X)$~~

non è detto che $\rho^*(0) = 0$

$\mathcal{A} = \{X : \rho(X) \le 0\}$
$\mathcal{A}^* = \{X : \rho^*(X) \le 0\}$ | posizioni accettabili

$$\rho^*(X) = \inf\{\beta : (X+\beta) \in \mathcal{A}^*\}$$

$\rho^*(X) = 500.000$ mi servono altri 500.000 per essere "accettabile"

$\rho^*(X) = -400.000$ posso investire 400.000 in una situazione rischiosa

---

$\mathcal{A}$ cono convesso di L^∞, contenente L^∞_+ — $\{X \in L^\infty \mid X(\omega) \ge 0 \text{ p.c.}\}$

$X \in \mathcal{A}, \sigma > 0 \Rightarrow \sigma X \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}^*$ sottinsieme convesso di L^∞

Proprietà di Fatou Sono equiv.

a) $\|X_n\|_\infty \le C, \ X_n \xrightarrow{q.c.} X \Rightarrow \rho^*(X) \le \liminf_n \rho^*(X_n)$

b) $\|X_n\|_\infty \le C, \ X_n \downarrow X \Rightarrow \rho^*(X_n) \uparrow \rho^*(X)$

---

a) $\Rightarrow$ b) $\quad X_n \downarrow X \qquad \rho^*(X_n) \uparrow \qquad \sup_n \rho^*(X_n) \le \rho^*(X)$

$\rho^*(X) \le \liminf_n \rho^*(X_n) \quad - \quad \rho^*(X) = \lim_n \rho^*(X_n)$

b) $\Rightarrow$ a) $\quad X = \lim_n X_n = \limsup_n X_n =$

$$= \inf_n \left(\sup_{k \ge n} X_k\right) = \inf_n Z_n$$

$$\rho^*(X) = \lim_{n\to\infty} \rho^*(Z_n) = \sup_n \rho^*(Z_n)$$

$$\rho^*(Z_n) \le \rho^*(X_k) \quad k \ge n \qquad \rho^*(Z) \le \inf_{k \ge n} \rho^*(X_k)$$

$$\rho^*(X) \le \sup_n \inf_{k \ge n} \rho^*(X_k)$$

Attenzione. La condizione

$X_n \uparrow X \Rightarrow \rho(X_n) \downarrow \rho(X)$

è più forte (nel caso delle misure coerenti)

Teorema 1 (misure convesse di rischio)

Sono equivalenti:

1) ρ^* ha la proprietà di Fatou
2) $\mathcal{A}^*$ chiuso per $\sigma(L^\infty, L^1)$
3) esiste una funzione di **penalizzazione**

$\alpha : \mathcal{Q} \mapsto]-\infty, +\infty]$

con $\inf_{Q \ll P} \alpha(Q) \in \mathbb{R}$

$$\rho^*(X) = \sup_{Q \ll P} \left(E^Q[-X] - \alpha(Q)\right)$$

4) si può prendere come "penalizzazione"

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}^*} E^Q[-X].$$

Osservazione: se ρ è coerente

$\alpha_{min}(Q) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases} \qquad \mathcal{A}$ è un cono

Teorema 2 (misure coerenti di rischio)

sono equivalenti

1) ρ ha la proprietà di Fatou
2) $\mathcal{A}$ chiuso per $\sigma(L^\infty, L^1)$
3) esiste $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E^Q[-X]$$

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E^Q[-X]$$

X è accettabile se, $\forall Q \in \mathcal{P}, \ E^Q[X] \ge 0$

- caso limite 1

$\mathcal{P} = \{Q\} \qquad X$ accettabile se $E^Q[X] \ge 0$

- caso limite 2

$\mathcal{P} = \mathcal{Q} \qquad E^Q[X] \ge 0 \quad \forall Q \ll P$

cioè se $X(\omega) \ge 0 \qquad P$ p.c.

Due risultati di analisi funzionale

Teorema di Krein-Smulian (Brezis)

E spazio di Banach separabile

C convesso di E'

C chiuso $\sigma(E', E) \iff \forall N, \ C \cap B_N = C_N$ chiuso (compatto) per la $\sigma(E', E)$

---

nelle parti limitate di E' la top. $\sigma(E', E)$ è metrizzabile

---

Lemma di Grothendieck (?)

C convesso di L^∞

C chiuso per $\sigma(L^\infty, L^1) \iff \forall N, \ C \cap B_N = C_N$ chiuso per la convergenza in probabilità (p.c.)
