Lezione 13

Modelli basati sul tasso LIBOR

$0 \le T_0 < T_1 < \dots < T_N \qquad \alpha_i = T_i - T_{i-1}$

$B_i(t) = B(t, T_i) \qquad L_i(t) = L(t, T_{i-1}, T_i)$

$$\boxed{\alpha_i L_i(t) = \frac{B_{i-1}(t)}{B_i(t)} - 1} \qquad \text{caplet } [T_{i-1}, T_i]$$

$\alpha_i \left(L(T_{i-1}, T_i) - R \right)^+$ – alla data T_i

Black 76

$$Capl_i^B(t) = \alpha_i B_i(t) \left[L_i(t) \phi(d_1) - R \phi(d_2) \right]$$

$$d_{1,2} = \frac{\log\left(\frac{L_i(t)}{R}\right) \pm \frac{1}{2} \sigma_i^2 (T_i - t)}{\sigma_i \sqrt{T_i - t}}$$

$\sigma_1, \dots, \sigma_N$ volatilità impl. di Black

spot $\bar{\sigma}_i$ $\qquad Capl_i^m(0) = Capl_i^B(0, \bar{\sigma}_i) \leftarrow$

flat σ_i^* $\qquad Cap_K^m(0) = \sum_{i=1}^{K} Capl_i^B(0, \sigma_K^*) \leftarrow$

La formula Black 76 non può essere vera

Vasicek Ho-Lee Hull-White C.I.R.

Modello di mercato

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \qquad \mathcal{T} = [0, T_N] \qquad L_i(t) \qquad i = 1, \dots, N$

$* \; \exists P^N \qquad W_t^N$ – (d-dim)

$dL_N(t) = L_N(t) \sigma_N(t) . dW_t^N$

determinista

inoltre $\frac{B_i(t)}{B_N(t)}$ è una P^N– martingala

$**$ prese P^i $\qquad \left.\frac{dP^i}{dP^N}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_i(t)}{B_N(t)} \cdot \frac{B_N(0)}{B_i(0)}$

$$dL_i(t) = L_i(t) \sigma_i(t) . dW_t^i$$

Formula caplet

$$Capl_i(t) = \alpha_i B_i(t) \left[L_i(t) \phi(d_1) - R \phi(d_2) \right]$$

$$d_{1,2} = \frac{\log\left(\frac{L_i(t)}{R}\right) \pm \frac{1}{2} \Sigma_i^2 (t, T_{i-1})}{\sqrt{\Sigma_i^2 (t, T_{i-1})}}$$

$$\Sigma_i^2 (t, T_{i-1}) = \int_t^{T_{i-1}} \|\sigma_i(s)\|^2 ds$$

$$\bar{\sigma}_i^2 . T_i = \int_0^{T_{i-1}} \|\sigma_i(s)\|^2 ds$$

---

il modello termina in T_{i-1}

l'opzione è esercitata al tempo T_i

---

induzione all'indietro

$P^N \qquad dL_N(t) = L_N(t) \sigma_N(t) dW_t^N$

$$dL_i(t) = L_i(t) \left[\mu_i(t, L_{i+1}(t), \dots, L_N(t)) dt + \sigma_i(t) dW_t^N \right]$$

$\mu_{N-1}, \dots, \mu_2, \mu_1$ sono da determinare

$$\left.\frac{dP^i}{dP^{i+1}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_i(t)}{B_{i+1}(t)} \cdot \frac{B_{i+1}(0)}{B_i(0)} = Q_{i+1} \left(1 + \alpha_{i+1} L_{i+1}(t) \right) = \Gamma_t^i$$

$d\Gamma_t^i = \Gamma_t^i \dots dW_t^{i+1}$

$$dW_t^i = dW_t^{i+1} - \frac{\alpha_{i+1} L_{i+1}(t)}{1 + \alpha_{i+1} L_{i+1}(t)} \sigma_{i+1}(t) dt =$$

$$= dW_t^N - \sum_{k=i+1}^{N} \frac{\alpha_k L_k(t)}{1 + \alpha_k L_k(t)} \sigma_k(t) dt$$

$$dL_t^i = L_t^i \sigma_i(t) dW_t^i$$

Come si calcolano le rate di un mutuo?

$C \qquad n$ = numero rate $\qquad r$ = interessi sulle rate

3,2% annuo $\qquad r = \frac{0{,}032}{12}$

rata D (sempre uguale)

$$C = \frac{D}{1+r} + \frac{D}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D}{(1+r)^n} =$$

$$= D \left(\frac{1}{1+r} + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \right)$$

---

rate rinegoziabile?

- capitale residuo C^*
- $(n-k)$ rate
- r_{k+1} – interesse sulle rate successive
