Lezione 11

Modelli basati sul tasso forward
(Heath – Jarrow – Morton)

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T) \cdot dW_t$$

W_t può essere d-dimens.

$\alpha(\omega,t,T)$

* ω fissato, $(t,T) \longrightarrow \alpha(\omega,t,T)$ continua

* $\forall$ fissato T, $\alpha(t,T)$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile

stesse cose per σ

$$\int_0^{T^*} ds \int_0^s |\alpha(\omega,t,s)|\,dt < +\infty \qquad \text{per quasi ogni } \omega$$

$$\int_0^{T^*} ds \int_0^s \sigma^2(\omega,t,s)\,dt < +\infty \qquad \text{q.o. } \omega$$

$\|\sigma(\omega,t,s)\|^2$

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)\,ds} \qquad \tilde{B}(t,T) = \frac{B(t,T)}{B_t} = \frac{e^{-\int_t^T f(t,s)\,ds}}{e^{\int_0^t f(s,s)\,ds}}$$

Teorema H.J.M.

$\forall T$ fissato

$\tilde{B}(t,T)\big|_{0 \le t \le T}$ è una martingala $\iff \alpha(t,T) = \sigma(t,T) \cdot \int_t^T \sigma(t,s)\,ds$

Conseguenza: il modello ammette una prob. mart. equivalente $\Updownarrow$

$\exists\ \gamma(t)$ a valori in $\mathbb{R}^d$ (W è d-dimensionale)

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T) \cdot \int_t^T \sigma(t,s)\,ds + \gamma(t) \cdot \sigma(t,T)$$

W_t proc. di Wiener d-dim. sotto P $\Rightarrow$ $W_t - \int_0^t \gamma(s)\,ds$ è un proc. di Wiener sotto P^*,

si modellizza direttamente sotto la prob. martingala.

Principio di modellizzazione

* si sceglie $\sigma(t,T) \longrightarrow \alpha(t,T)$ è determinato

** $f(t,T) = f^*(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)\,ds + \int_0^t \sigma(s,T)\,dW_s$

$f^*(0,T)$ — osservato sul mercato $B^*(0,T)$ $\forall T$

*** $B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)\,ds}$

---

l'inversione curve dei rendimenti (calibrazione del modello sui dati osservati) automatica

Non è un modello, ma una modellizzazione

Un modello particolare come esempio:

$d=2 \qquad \sigma(t,T) = \left(\sigma_1, \sigma_2 e^{-\lambda(T-t)}\right) \qquad \sigma_1, \sigma_2, \lambda > 0$

Anche i modelli "short rate" che consentono inversione curve rendimenti sono H.J.M.

$$B(t,T) = \exp\left(a(t,T) - b(t,T)\,r(t)\right)$$

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log B(t,T) = -a_T(t,T) + b_T(t,T)\,r(t)$$

$$df(t,T) = \underset{\substack{\text{determinato}\\ \text{da } \sigma}}{(\ \ldots\ )}\,dt + \underbrace{b_T(t,T)\,\sigma(t,r(t))}_{\sigma(t,T)}\,dW_t$$

Principio della dimostrazione H.J.M.

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)\,ds} = e^{X_t}$$

$$X_t = \int_t^T \left(-f(s,s) + f(s,s) - f(t,s)\right) ds$$

. . . — diversi conti

$$dX_t = \left(r(t) - \int_t^T \alpha(t,s)\,ds\right) dt - \left(\int_t^T \sigma(t,s)\,ds\right) dW_t$$

$$dB(t,T) = d e^{X_t} = e^{X_t}\left(dX_t + \frac{1}{2}\, d[X]_t\right) =$$

$$= B(t,T)\Big(\underbrace{\Big(r(t) - \int_t^T \alpha(t,s)\,ds + \frac{1}{2}\Big(\int_t^T \sigma(t,s)\,ds\Big)^2}_{=0\quad \forall T \text{ fissato}}\Big)dt + \ldots\, dW_t\Big)$$

derivando rispetto a T

$$\alpha(t,T) = \left(\int_t^T \sigma(t,s)\,ds\right) \cdot \sigma(t,T)$$

Teorema di Fubini stocastico

$$\int dt\left(\int \ldots\, dW_s\right) = \int dW_s\left(\int \ldots\, dt\right)$$

$(t,T) \longrightarrow \sigma(\omega,t,T)$ continua

La parametrizzazione di Musiela

$D(t,x) = B(t,t+x) \qquad r(t,x) = f(t,t+x)$

x: time to maturity; $t+x$: time of maturity

$r(t,\cdot)$, $D(t,\cdot)$ — processi stocastici a valori in spazi di curve

$$r(t+\Delta t,x) - r(t,x) = f(t+\Delta t, t+\Delta t+x) - f(t+\Delta t, t+x)$$
$$+ f(t+\Delta t, t+x) - f(t,t+x) =$$

$$\simeq \frac{\partial f}{\partial T}(t+\Delta t, t+x) \cdot \Delta t + \alpha(t,t+x)\,\Delta t +$$
$$+ \sigma(t,t+x)\left(W_{t+\Delta t} - W_t\right)$$

$\Delta t \to 0^+$

$$\boxed{dr(t,\cdot) = \left(\alpha(t,\cdot) + D r(t,\cdot)\right) dt + \sigma(t,\cdot) \cdot dW_t}$$

equaz. diff. stocastica infinito-dimensionale