UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 16/1/25 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Posto $X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ considerare la funzione $f : X \to X$ dove $f(x)$ è il resto della divisione $x^3 : 5$. Provare che f è bigettiva ed esibire la sua inversa.

2. Calcolare $\dfrac{25^{-1/4} \cdot 5^{2/3}}{(1/5)^{1/3} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{5/2}}$.

3. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $2z^2 + (6 - i)z + 1 + 3i = 0$.

4. Provare che la successione $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ data da $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ è strettamente crescente.

5. Verificare che la funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x \cdot \sin(x)$ ammette massimo e minimo, e trovare il minimo.

6. Verificare che alla funzione $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin(x)} + x \cdot \left(\frac{2}{\pi} - 1\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

si applica il teorema di Rolle.

7. Determinare l'approssimazione di Taylor al quinto ordine in 0 per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sin(x) \cdot \log(1 + x)$.

8. Considerare la funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \mathrm{e}^x + x - 3$. Provare che ad f si applica il metodo iterativo di ricerca degli zeri tramite le tangenti al grafico, e dire da quale estremo debba iniziare l'iterazione.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 16/1/25 — Esercizio

Considerare l'espressione $\quad f(x) = \dfrac{x}{\log(x) - 1}$.

(A) (1 punto) Trovare il più grande insieme $I \subset \mathbb{R}$ tale che essa definisce una funzione $f : I \to \mathbb{R}$.

(B) (3 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di I e i determinare suoi asintoti.

(C) (3 punti) Trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f e i suoi punti di minimo e massimo relativo.

(D) (2 punti) Trovare gli intervalli di concavità e convessità di f.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 16/1/25 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. $f(x) = x$ per $x = 0,\ 1,\ 4$ mentre $f(2) = 3$ e $f(3) = 2$, dunque $f^{-1} = f$

2. 5^{-}[redacted]$^{3/4}$

3. $z = -\frac{i}{2},\ z = -3 + i$

4. $a_{n+1} > a_n \iff \frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} \iff (n+1)^2 > n(n+2) \iff 1 > 0$

5. f è continua su un intervallo chiuso e limitato, dunque si applica il teorema di Weierstrass; inoltre è non negativa e nulla agli estremi, dunque ha minimo 0

6. Il limite di $f(x)$ in 0^+ vale 1, dunque f è continua su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e derivabile su $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ —in realtà anche in 0— e $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

7. $x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$

8. $f(0) < 0 < f(2)$; $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 2]$; da 2

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 16/1/25 — Esercizio

Soluzione dell'esercizio

(A) $I = (0, \mathrm{e}) \cup (\mathrm{e}, +\infty)$

(B) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to \mathrm{e}^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to \mathrm{e}^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; asintoto verticale $x = \mathrm{e}$

(C) Decrescente su $(0, \mathrm{e})$ e su $(\mathrm{e}, \mathrm{e}^2]$; crescente su $[\mathrm{e}^2, +\infty)$; minimo relativo in e^2

(D) Concava su $(0, \mathrm{e})$ e su $[\mathrm{e}^3, +\infty)$; convessa su $(\mathrm{e}, \mathrm{e}^3]$