UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 27/6/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Calcolare $\int\limits_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

2. Calcolare $\int x \cdot \cos(3x)\,\mathrm{d}x$.

3. Determinare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ -5 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Trovare un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$ che sia contemporaneamente ortogonale, rispetto al prodotto scalare standard, al vettore $v = (0, 4, -1)$ e al vettore $w = (1, -1, 2)$.

5. Determinare una base del nucleo dell'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_3$.

6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y' = 2y - \mathrm{e}^{2x}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 27/6/23 — Esercizio

Considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(A) (2 punti) Calcolare gli autovalori di A.

(B) (1 punto) Stabilire, motivando la risposta, se A sia diagonalizzabile.

(C) (2 punti) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(D) (2 punti) Trovare una matrice invertibile $M \in \mathbb{R}^{2,2}$ tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ sia diagonale.

(E) (2 punti) Determinare un autovettore v di A con $\langle v, (1,1) \rangle = -1$, dove $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$.

Risposte ai quesiti

1. $1 - \frac{\pi}{2}$

2. $\frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{x}{3} \cdot \sin(3x) + c$

3. $\mathrm{rk}(A) = 2$

4. Un multiplo scalare non nullo di $v \times w = (7, -1, -4)$

5. $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Span}\{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$

6. $y = (-x + c)\,\mathrm{e}^{2x}$, con $c \in \mathbb{R}$

Soluzione dell'esercizio

(A) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$

(B) Sì, perché ha due autovalori distinti

(C) $V_2 = \mathrm{Span}\{(1,-1)\}$, $V_4 = \mathrm{Span}\{(1,-3)\}$

(D) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

(E) $\frac{1}{2}(1,-3)$