UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 12/9/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Marco e Lucia hanno giocato 9 set a ping-pong e Marco ha vinto 5 volte, ma ha perso almeno uno tra il primo e l'ultimo set. Quante sono le possibili successioni di vittorie di Marco?

2. Calcolare $\log_{81}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. Posto $z = 4 \cdot \mathrm{e}^{2i}$ e $w = 6 \cdot \mathrm{e}^{-7i}$ esprimere in forma esponenziale il numero $z \cdot w$.

4. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \tan(x)}$.

5. Verificare che $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[-1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$ data da $f(x) = x + \sin(x)$ è invertibile. Posto $g = f^{-1}$ calcolare $g'(0)$.

6. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(x) \cdot \mathrm{e}^x - \cos(x)}{x^2 - 2x}$.

7. Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 2 nel punto $x = 0$ per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \cos(x) - \cos(2x)$.

8. Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (-1)^n}$ converge. Spiegare.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Considerare l'espressione $f(x) = \dfrac{3x^2 - (x+1) \cdot |x|}{x-1}$.

(A) (1 punto) Determinare il più grande $D \subset \mathbb{R}$ tale che essa definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (2 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di D.

(C) (2 punti) Determinare gli asintoti del grafico di f.

(D) (2 punti) Calcolare $f'(x)$ dove esiste, oppure $f'_{\pm}(x)$.

(E) (2 punti) Individuare tutti i punti di massimo e minimo locale per f.

Risposte ai quesiti

1. $\binom{7}{5} + 2\binom{7}{4} = \binom{9}{5} - \binom{7}{3} = 91$

2. $-\frac{1}{8}$

3. $24 \cdot \mathrm{e}^{-5i}$

4. -3

5. f è continua e strettamente crescente e $f(\pm 1) = \pm 1 \pm \frac{\pi}{2}$; $g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

6. Non esiste

7. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$

8. Converge poiché $0 < \frac{1}{n^2+(-1)^n} < \frac{2}{n^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(B) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$

(C) Verticale $x = 1$; obliquo destro $y = 2x + 1$; obliquo sinistro $y = 4x + 5$

(D) $f'(x) = \frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}$ per $x > 0$ e $x \neq 1$; $f'(x) = \frac{4x^2-8x-1}{(x-1)^2}$ per $x < 0$; $f'_\pm(0) = \pm 1$

(E) Minimo locale in $x = 0$ e $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$; massimo locale in $x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$