UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 31/1/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Assumendo noto che $\sqrt{2}$ non è razionale, dimostrare per assurdo che $4.7\overline{13}+\sqrt{2}$ non è razionale.

2. Provare che $\log_7(48) < 2$.

3. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+(-1)^n\cdot n}{2n^2+\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$.

4. Considerare la funzione $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ data da $f(x) = \mathrm{e}^x + x^2$. Determinare la sua immagine J e provare che f vista come funzione da $[0,1]$ a J è invertibile con inversa continua.

5. Trovare il più grande insieme $D\subset\mathbb{R}$ sul quale l'espressione $f(x)=\sin\left(\sqrt{x}\right)$ definisce una funzione $f:D\to\mathbb{R}$. Dire per quali $x\in D$ esiste $f'(x)$ ed esplicitarne l'espressione.

6. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\cdot\log(1+x)}$.

7. Esibire lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto $x=0$ per la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f(x) = \mathrm{e}^{x-x^2}$.

8. Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\log(n)}$ è convergente.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 31/1/23 — Esercizio

Considerare l'espressione $f(x) = \dfrac{4x^2 + 4|x| + 1}{2x - 1}$.

(A) (1 punto) Determinare il più grande $D \subset \mathbb{R}$ su cui essa definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (3 punti) Trovare tutti gli asintoti del grafico di f.

(C) (2 punti) Trovare i punti x di D in cui $f'(x)$ non esiste, specificandone la natura.

(D) (2 punti) Trovare i punti di massimo e di minimo relativo di f.

(E) (1 punto) Trovare gli intervalli su cui f è strettamente convessa e quelli su cui è strettamente concava.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. $4.7\overline{13}$ è un razionale q; se $4.7\overline{13}+\sqrt{2}$ fosse un razionale r allora $\sqrt{2}=r-q$ sarebbe razionale

2. L'esponenziale in base 7 è monotona crescente, dunque

$$\log_7(48)<2 \ \Leftrightarrow\ 7^{\log_7(48)}<7^2 \ \Leftrightarrow\ 48<49$$

che è vera

3. $\frac{3}{2}$

4. Le funzioni $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ e $x\mapsto x^2$ sono crescenti su $[0,1]$, dunque f lo è. Ne segue che $J=[1,\,\mathrm{e}+1]$ e che f è invertibile. Inoltre f è continua, dunque la sua inversa lo è

5. $D=[0,+\infty)$; esiste $f'(x)$ per $x\in(0,+\infty)$ e $f'(x)=\dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$

6. $\frac{1}{2}$

7. $1+x-\frac{1}{2}x^2$

8. Si applica il criterio per le serie a segno alterno: il valore assoluto del termine generico è decrescente e infinitesimo

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

(B) Verticale $x = \frac{1}{2}$; obliquo destro $y = 2x + 3$; obliquo sinistro $y = 2x - 1$

(C) $x = 0$ punto angoloso

(D) Massimo relativo in $x = 0$, minimo relativo in $x = \frac{3}{2}$

(E) Strettamente convessa su quelli contenuti in $(\frac{1}{2}, +\infty)$, strettamente concava su quelli contenuti in $[0, \frac{1}{2})$