UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 25/11/22 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Posto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ definire $f : A \to B$ dove $f(x)$ è il resto della divisione $(2x^3 + 3) : 5$. Dire se f è iniettiva e/o surgettiva.

2. Risolvere per $x \in \mathbb{R}$ la disequazione $\log_2(x-3) + \log_2(x-5) > 0$.

3. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $\sqrt{3} \cdot z^2 + \left(\sqrt{2} + i\sqrt{3}\right) \cdot z + i\sqrt{2} = 0$.

4. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{n^2+2n-3}\right] - 2n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$.

5. Considerare la funzione $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sqrt{x} + \log_3(x+5)$. Provare che la sua immagine è un intervallo J e dire se f vista come funzione da $[0,4]$ a J sia invertibile con inversa continua.

6. Per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x + \sin(x)$ trovare tutti i punti stazionari e dire se siano estremali.

7. Determinare l'approssimazione di Taylor al quarto ordine in $x_0 = 0$ per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \mathrm{e}^x \cdot \cos(x)$.

8. Considerare la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \log(x) + x^3$. Determinare il minimo a tale che sull'intervallo $[a, 1]$ si possa applicare il metodo iterativo $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ per la ricerca di uno zero di f. Dire inoltre se si debba porre $x_0 = a$ oppure $x_0 = 1$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 25/11/22 — Esercizio

Considerare l'espressione

$$f(x) = \frac{x(x - |2x - 8|)}{x + 1}.$$

(A) (1 punto) Determinare il più grande insieme D su cui essa definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (3 punti) Trovare tutti gli asintoti del grafico di f.

(C) (1 punto) Determinare tutti gli zeri di f.

(D) (4 punti) Trovare tutti i punti di massimo e di minimo relativo di f.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. Non iniettiva, surgettiva

2. $x > 4 + \sqrt{2}$

3. $z_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}},\ z_2 = -i$

4. Esiste e vale -1

5. $J = [\log_3(5), 4]$. Sì, f è continua e strettamente crescente

6. $x = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{N}$; no, la f è strettamente crescente

7. $f(x) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \mathrm{o}\left(x^5\right)$

8. $a = \frac{1}{\sqrt[3]{6}};\ x_0 = 1$

Soluzione dell'esercizio

Soluzione esercizio

(A) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(B) Verticale $x = -1$; obliquo sinistro $y = 3x - 11$; obliquo destro $y = 9 - x$

(C) $x = 0$, $x = \frac{8}{3}$, $x = 8$

(D) Massimo relativo in $x = -1 - \sqrt{\frac{11}{3}}$ e $x = 4$, minimo relativo in $x = -1 + \sqrt{\frac{11}{3}}$