IST MAT I - CIA 7/12/2022

ZANICHELLI P 171

39) CALCOLARE $f'(0)$ E STABILIRE SE $f'(x)$ È CONTINUA IN $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

- SI PUÒ ESTENDERE IN $x=0$?

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

- COMPORTAMENTO ALL' ∞

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

$y=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^2}_{\infty} \sin\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{0} \overset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^2}\sin y$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin y}{y}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{y} = +\infty$$

- DERIVATA

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- $f'(x)$ SI PUÒ ESTENDERE A $x = 0$?

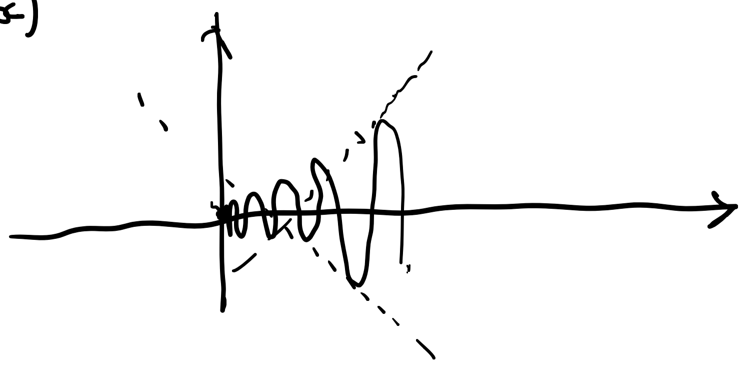
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{NON ESISTE}$$

$f'(x)$ NON SI PUÒ ESTENDERE IN $x = 0$

$f(x)$



P 192

41) STUDIARE IL GRAFICO DELLE SEGUENTI FUNZIONI

$$f(x) = x^2 e^x$$

- DOMINIO : $D = \mathbb{R}$

- ZERI : $x = 0$ $\quad (e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R})$

- COMPORTAMENTO ALL' INFINITO

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$$

Y = 0 È ASINTOTO ORIZZONTALE $x \to -\infty$

DE L' HOPITAL

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \underset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^2 e^x = \infty$$

- ASINTOTO OBLIQUO A $x \to +\infty$?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}e^x}{\cancel{x}} = +\infty$$

NESSUN ASINTOTO OBLIQUO

• PUNTI STAZIONARI (x t.c. $f'(x)=0$)

$$f'(x) = (x^2e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2+2x)$$

STUDIO LE SOLUZIONI DI

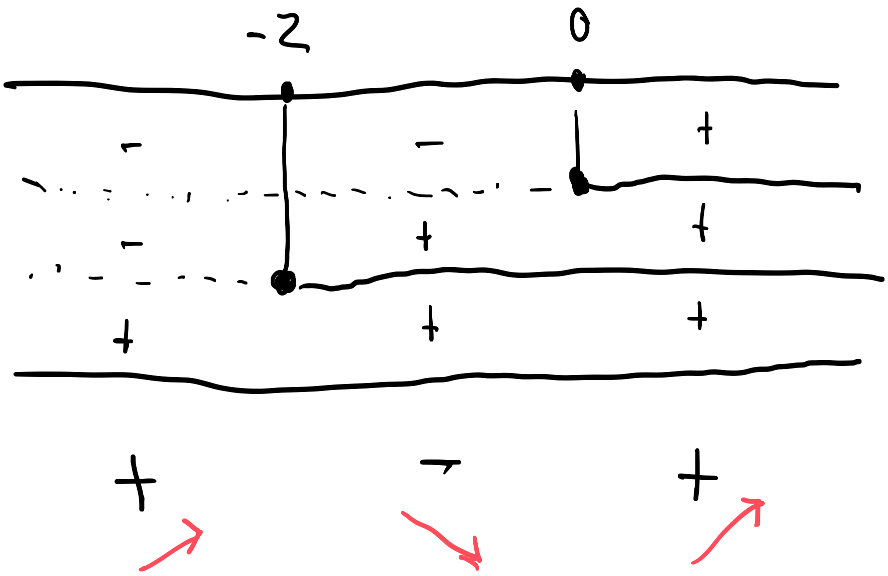
$$e^x(\underbrace{x^2+2x}) = 0 \iff x(x+2)=0 \iff \begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}$$

• MASSIMO O MINIMO?

STUDIO IL SEGNO DI $f'(x)$.

$$f'(x)>0 \iff x\,e^x\,(x+2) > 0$$

$x>0$ $\qquad$ $x>-2$



$\Rightarrow$

$x=-2$ PUNTO DI MASSIMO LOCALE (o RELATIVO)

$x=0$ PUNTO DI MINIMO LOCALE (o RELATIVO)

- RICERCA DEI FLESSI $\left(f''(x) = 0 \right)$

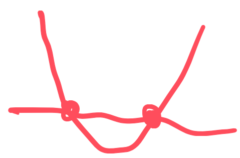
$$f''(x) = \left(e^{x}(x^2+2x) \right)' = e^{x}\left(x^2+2x\right) + e^{x}\left(2x+2\right)$$

$$= e^{x}\left(x^2+4x+2\right)$$

STUDIO

$$e^{x}\left(x^2+4x+2\right) = 0 \iff x^2+4x+2 = 0 \iff$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{-\cancel{4}^{\,2} \pm \cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}_{\,1}} = \begin{cases} -2+\sqrt{2} \\ -2-\sqrt{2} \end{cases}$$

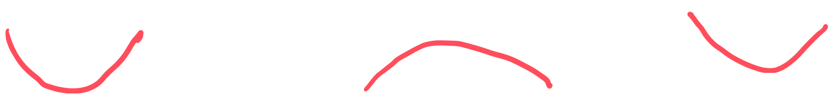


<u>STUDIO IL SEGNO</u> DI $f''(x)$

$$f''(x) > 0 \iff x < -2-\sqrt{2} \ \lor \ x > -2+\sqrt{2}$$

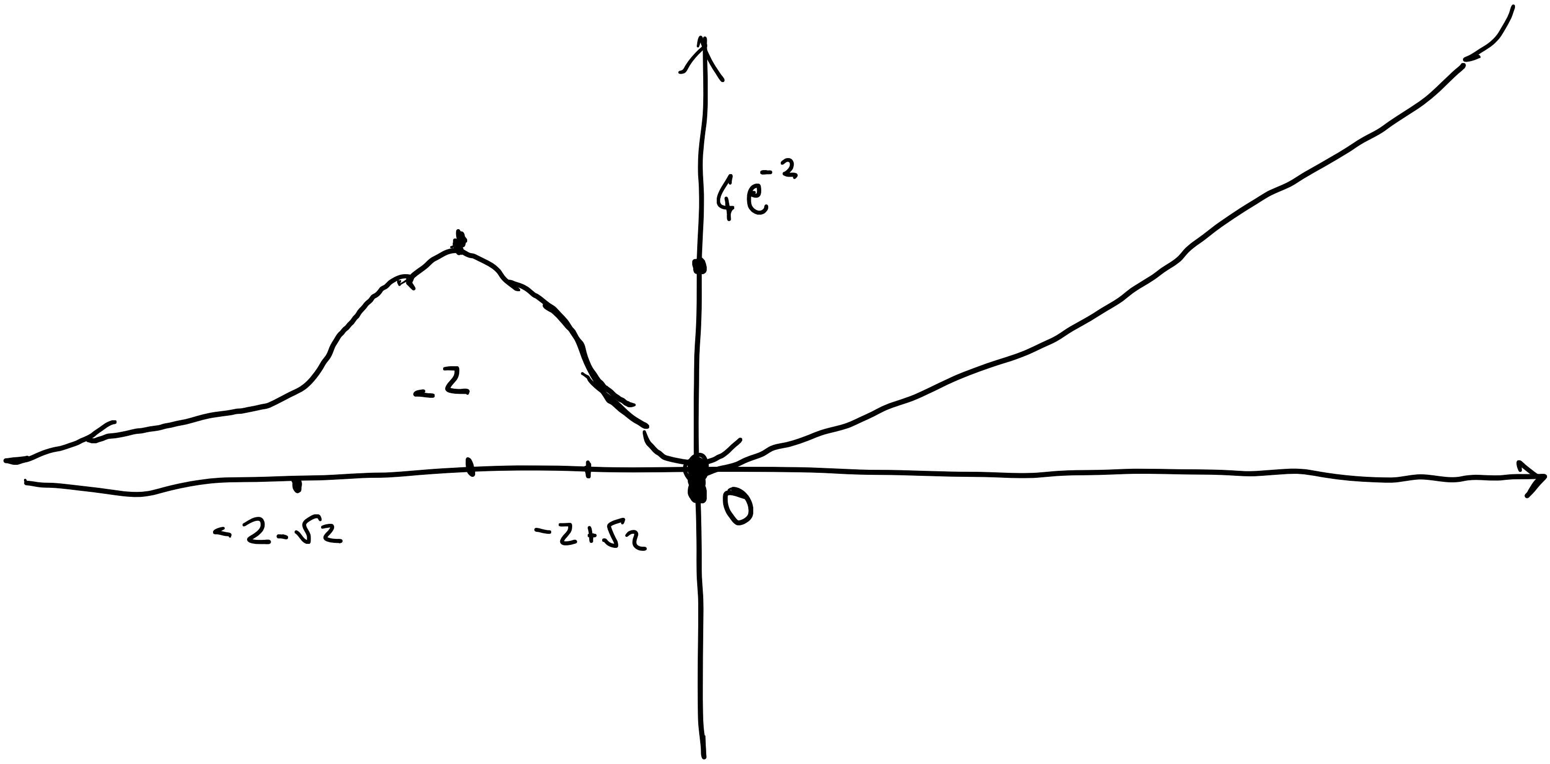
$-2-\sqrt{2}$ $\qquad\qquad\qquad$ $-2+\sqrt{2}$

$+ \qquad\qquad - \qquad\qquad +$



$x = -2+\sqrt{2}$ E $x = -2-\sqrt{2}$ SONO FLESSI

$$f(-2) = 4e^{-2}$$



4.7 $f(x) = \sqrt{x} \log x$

- DOMINIO $\quad x \in \mathbb{R},\ x > 0$
- ZERI $\quad x = 1$
- COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI DI D

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\sqrt{x}}_{0}\ \underbrace{\log x}_{-\infty} =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x \to 0^+} -2 \cdot x^{-1} \cdot \overbrace{x^{\frac{3}{2}}}^{x^{\frac{1}{2}}} = 0^-$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x} \log x = \infty$$

• ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} \overset{\text{DE L'HOPITAL}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} 2\,\frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\,\frac{1}{\sqrt{x}} = 0^{+}$$

NO ASINTOTO OBLIQUO

• PUNTI STAZIONARI

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\log x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\log x}{2}+1\right)$$

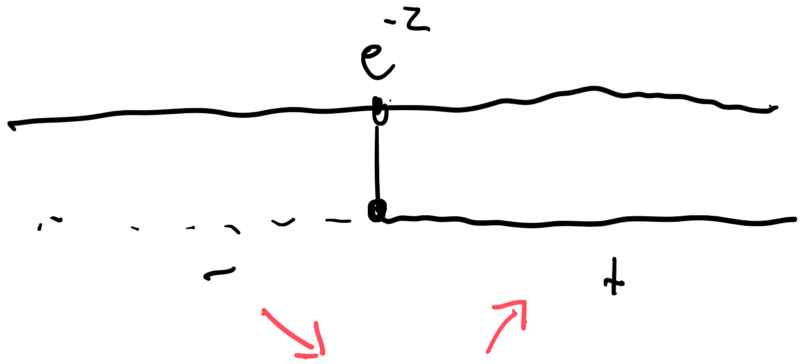
STUDIO

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\log x}{2}+1\right) = 0 \iff \log x + 2 = 0$$

$$\iff \boxed{x = e^{-2}} \quad \left(N \ \ 0 < e^{-2} < 1\right)$$

STUDIO IL SEGNO DI $f'(x)$

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\log x}{2}+1\right) > 0 \iff x > e^{-2}$$



$x = e^{-2}$ È MINIMO LOCALE

$$f(e^{-2}) = \sqrt{e^{-2}}\,\log(e^{-2}) = -2\sqrt{e^{-2}} < 0$$

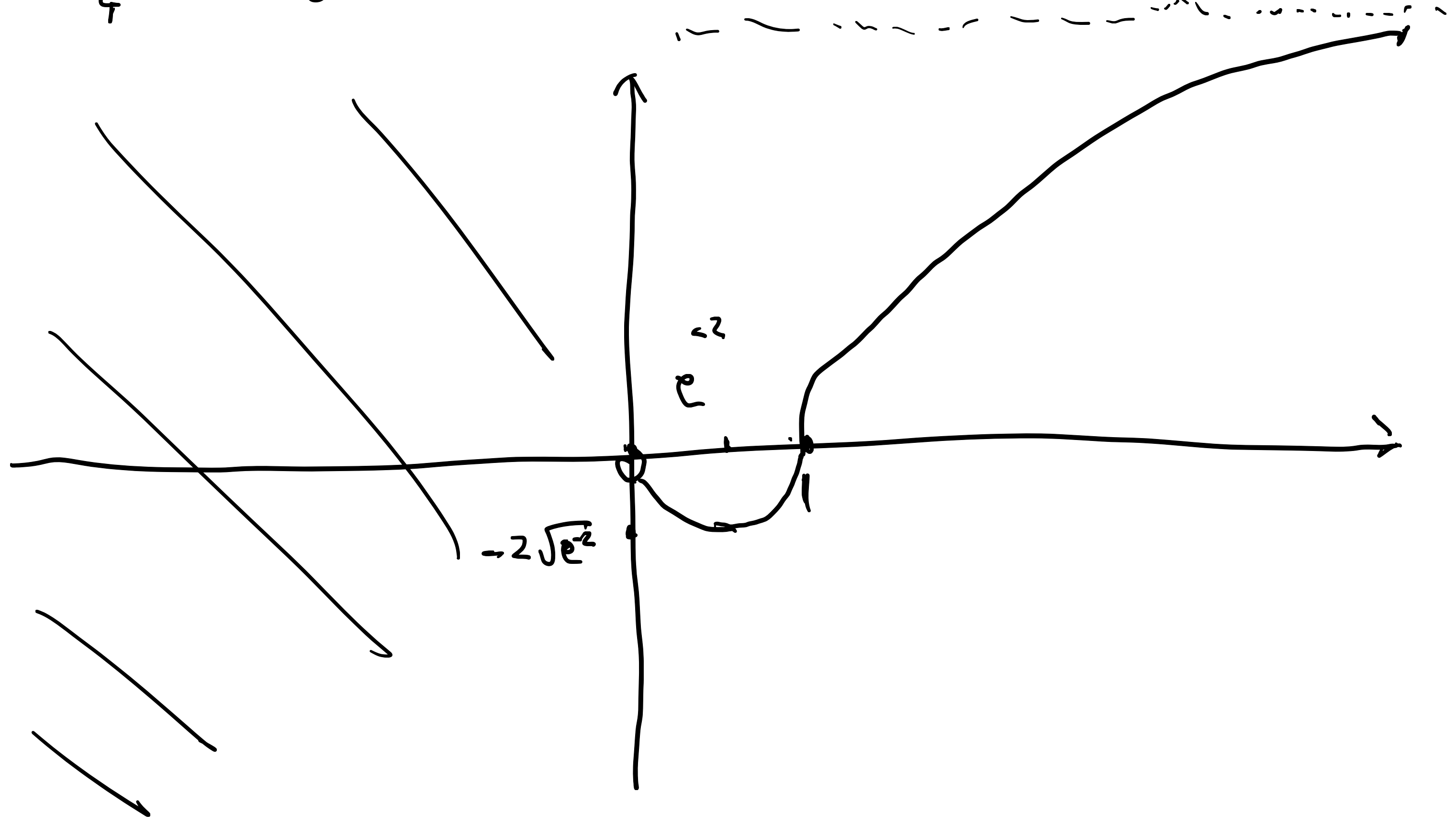
$\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$

- FLESSI

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\log x}{2}+1\right)\right)' = \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{\log x}{2}+1\right) + x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{\log x}{2} - \cancel{1} + \cancel{1}\right) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\log x$$

$$-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\log x = 0 \iff x = 1$$



ESERCIZIO 53 P 193

DETERMINARE FUNZIONI $C_1 = C_1(n)$ E $C_2 = C_2(n)$ TALI CHE

$$C_1(a+b) \leq \left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n \leq C_2(a+b) \quad , \forall a,b \in \mathbb{R}, n \geq 2$$

E CHE SIANO "MIGLIORI POSSIBILI", OVVERO

$$C_1(n) = \max\left\{ c \in \mathbb{R} : c(a+b) \leq \left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n, \forall a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$C_2(n) = \min\left\{ c \in \mathbb{R} : \left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n \leq c(a+b), \forall a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

OSSERVAZIONE: 0

SE AMMETTIAMO CHE $a+b$ POSSA ASSUMERE SIA VALORI ≥ 0 CHE ≤ 0 (COME L'ESERCIZIO SEMBRA CONSENTIRE) ALLORA NON ESISTONO LE COSTANTI C_1, C_2.

INFATTI DA

$$C_1(a+b) \leq \left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n \leq C_2(a+b)$$

OTTENIAMO

$$C_1(a+b) \leq C_2(a+b)$$

CHE CI DA

$$\left.\begin{array}{lll} C_1 \leq C_2 & \text{SE} & a+b \geq 0 \\ C_1 \geq C_2 & \text{SE} & a+b \leq 0 \end{array}\right\} \quad C_1 = C_2$$

MA CIÒ IMPLICA CHE

$$\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)^n = C_1(a+b) \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

MA LE DUE FUNZIONI NON DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE.

SOSPETTO CHE L'ESERCIZIO SIA STATO PENSATO CON

$a\geq 0$ E $b\geq 0$

$\boxed{\text{ASSUMERÒ QUINDI CHE } a\geq 0 \text{ E } b\geq 0}$

OSSERVAZIONE 1

SE $a+b=0$, ALLORA $\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)^n=0$ (CON n DISPARI SE UNO TRA a E b È NEGATIVO)

IN PARTICOLARE, OGNI COSTANTE C_1, C_2 SODDISFA LE DISEQUAZIONI RICHIESTE

$\boxed{\text{ASSUMERÒ QUINDI CHE } a+b>0}$

OSSERVAZIONE 2

SE $b=0$, ALLORA LE DISEQUAZIONI DIVENTANO

$$c_1 a \leq a \leq c_2 a$$

CHE SONO VERIFICATE PER $c_1 \leq 1$ E $c_2 \geq 1$

TENIAMO A MENTE ~~...~~ QUESTO CASO E

$\boxed{\text{ASSUMIAMO CHE } b \neq 0.}$

STUDIAMO LA FUNZIONE

$$f(a,b) = \frac{\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n}{a+b}$$

HA 2 VARIABILI, MA USANDO L'OSSERVAZIONE 2 POSSIAMO RIDURCI AD UNA

$$\frac{\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n}{a+b} = \frac{\left(\sqrt[n]{b}\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} + 1\right)\right)^n}{b\left(\frac{a}{b}+1\right)} = \frac{\cancel{b}\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} + 1\right)^n}{\cancel{b}\left(\frac{a}{b}+1\right)}$$

$$\overset{\frac{a}{b}=x}{=} \frac{\left(\sqrt[n]{x} + 1\right)^n}{x+1} =: f(x)$$

$f(x)$ È DEFINITA SE $D = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \geq 0\}$

OSSERVAZIONE 3

ABBIAMO CHE

$$f(x) \geq c \iff \left(\sqrt[n]{x}+1\right) \geq c(x+1)$$

$$f(x) \leq c \iff \left(\sqrt[n]{x}+1\right) \leq c(x+1) \quad \text{SE } x+1 > 0$$

CERCHIAMO MINIMO E MASSIMO GLOBALE DI $f(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{\left(\sqrt[n]{x}+1\right)^n}{x+1}\right)' = \frac{\left(\left(\sqrt[n]{x}+1\right)^n\right)'(x+1) - \left(\sqrt[n]{x}+1\right)^n}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{n}\left(\sqrt[n]{x}+1\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} x^{\frac{1}{n}-1}(x+1) - \left(\sqrt[n]{x}+1\right)^n}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[n]{x}+1\right)^{n-1}\left(\cancel{x^{\frac{1}{n}}} + x^{\frac{1}{n}-1} - \cancel{x^{\frac{1}{n}}} - 1\right)}{(x+1)^2}$$

f NON DEFINITA IN $x=-1$

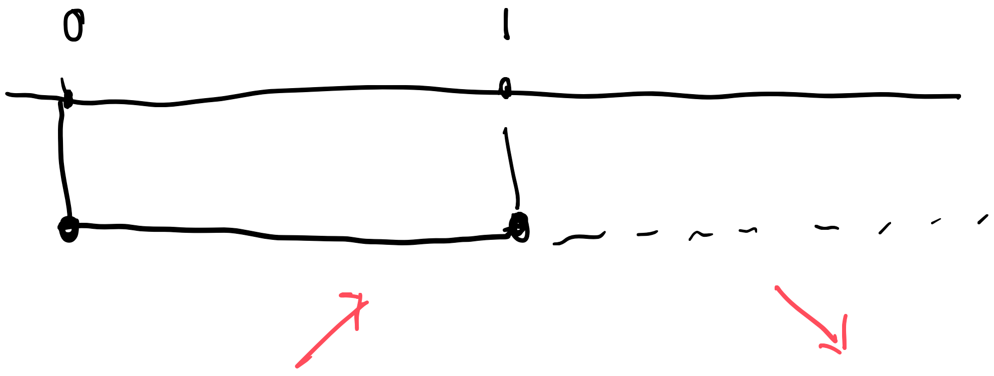
- PUNTI STAZIONARI

$$\left(\sqrt[n]{x}+1\right)^{n-1} = 0 \iff x = -1$$

$$x^{\frac{1}{n}-1} - 1 = 0 \iff \sqrt[n]{x} = x \iff x = 1, \; x = -1$$

SEGNO DERIVATA

$$f'(x) \geq 0 \iff 0 \leq x \leq 1$$

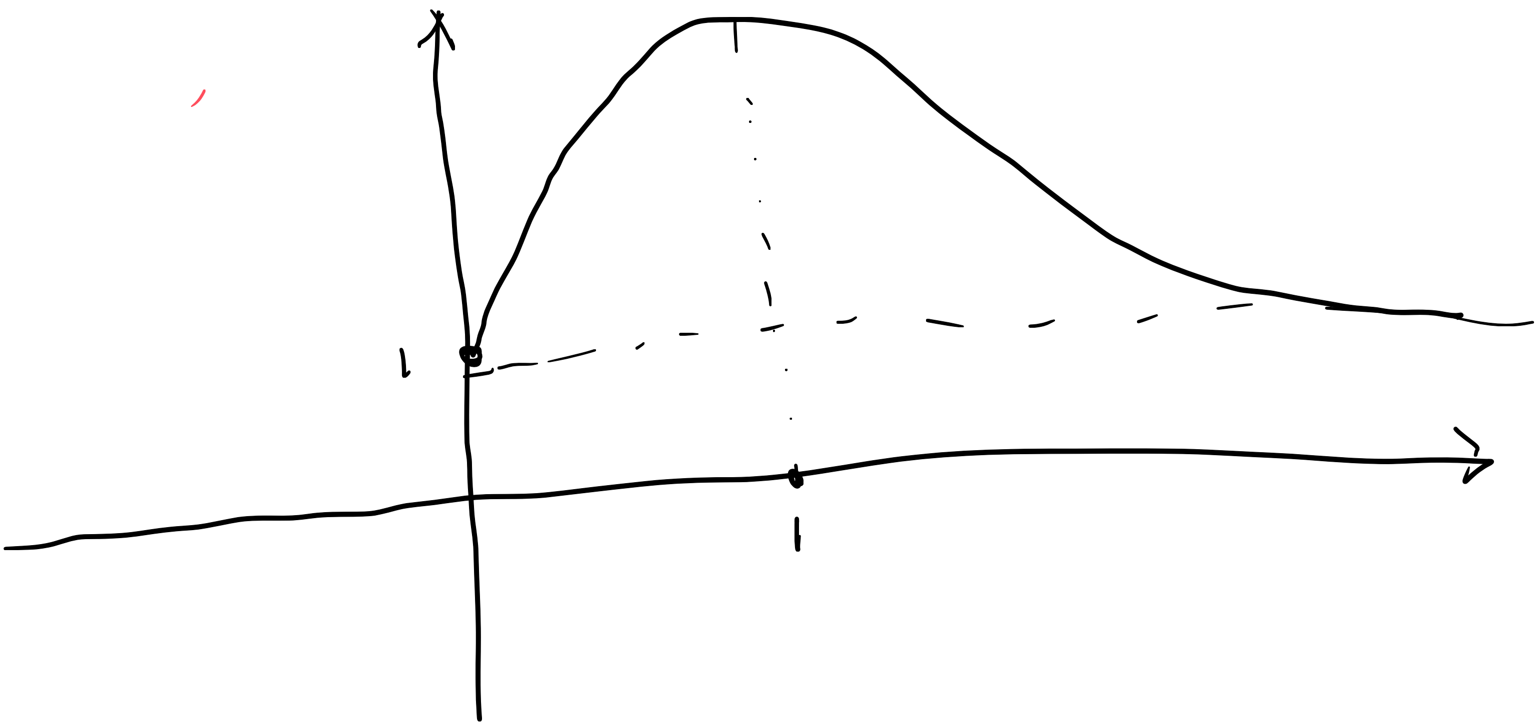


OVVERO $x = 0$ È MINIMO LOCALE

E $x = 1$ È MASSIMO LOCALE

- LIMITI

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$



QUINDI $$f(0) \le f(x) \le f(1)$$

$$1 \le f(x) \le 2^{n-1}$$

QUINDI $$\boxed{1 \cdot (a+b) \le \left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n \le 2^{n-1}(a+b)}$$

$\forall n \ge 2$ E $\forall a, b \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.