IST MAT I - CIA 26/10/2022

FOGLIO 3. ESERCIZIO 11 e) (NON SVOLTO IN CLASSE)

SAPENDO CHE $p(z)$ HA RADICE z_1 TROVARE TUTTE LE RADICI CON MOLTEPLICITÀ

$$p(z) = z^4 + (2i-1)z^3 + (3i-3)z^2 - (4+10i)z + 6+2i$$

$$z_1 = 1-i$$

DIVIDO $p(z)$ PER $(z-z_1)$

	1	$2i-1$	$3i-3$	$-4-10i$	$6+2i$
$1-i$		$1-i$	$i+1$	$2+6i$	$-6-2i$
	1	i	$4i-2$	$-2-4i$	//

OTTENGO

$$p(z) = (z-(1-i))\underbrace{\left(1z^3 + iz^2 + (4i-2)z - 2-4i\right)}_{q(z)}$$

CERCO LE RADICI DI $q(z)$. OSSERVO CHE

$$q(1-i) = 1 - \cancel{3i} - 3 + i + i(\cancel{1} - 2i - \cancel{1}) + \cancel{6i} + \cancel{2} - \cancel{2} - \cancel{4i} = 0$$

QUINDI $z_2 = 1-i$ È UNA RADICE DI $q(z)$.

DIVIDO $q(z)$ PER $(z-z_2)$

	1	i	$4i-2$	$-2-4i$
$1-i$		$1-i$	$1-i$	$2+4i$
	$\underline{1}$	1	$3i-1$	//

Ottengo

$f(z)$

$$p(z)=(z-(1-i))^2(1z^2+1z+3i-1)$$

Cerco le radici di $f(z)$. Uso la formula.

$$z_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1-12i+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{(3-2i)^2}}{2}$$

$$z_3=\frac{-1-3+2i}{2}=-2+i \qquad z_4=\frac{-1+3-2i}{2}=1-i$$

Quindi

$$p(z)=(z-(1-i))^3(z-(i-2))$$

Molteplicità 3

Molteplicità 1

IST MAT I - CIA
26/10/2022

FOGLIO 3

Es 1

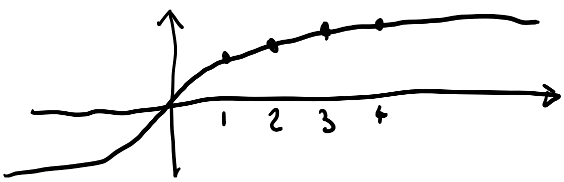
c) $a_n = n \arctan(n)$

MONOTONA CRESCENTE $a_n \le a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

" DECRESCENTE $a_n \ge a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$b_n = n \qquad b_{n+1} - b_n = n+1-n = 1 > 0$

$c_n = \arctan(n)$



c_n È MONOTONA CRESCENTE

FATTO

IL PRODOTTO DI SUCCESSIONI MONOTONE POSITIVE È MONOTONA

$$\left.\begin{array}{l} b_n < b_{n+1}, \ c_n > 0 \Rightarrow b_n c_n < b_{n+1} c_n \\ c_n < c_{n+1}, \ b_{n+1} > 0 \Rightarrow c_n b_{n+1} < c_{n+1} b_{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{b_n c_n}_{a_n} < \underbrace{b_{n+1} c_{n+1}}_{a_{n+1}}.$$

Es 2

a) $a_n = \dfrac{n^2 - 3n + 3}{n^2 + 4n + 3}, \qquad L = 1$

DOBBIAMO VERIFICARE CHE:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : |a_n - L| < \varepsilon$, PER $n > N$.

FISSO $\varepsilon > 0$.

$$|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n^2 - 3n + 3}{n^2 + 4n + 3} - 1 \right| < \varepsilon$$

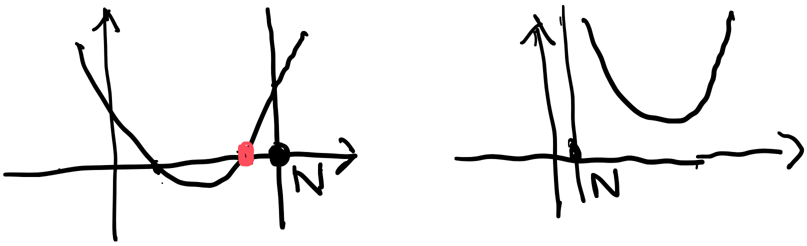
$$\left|\frac{\cancel{n^2}-3n+\cancel{3}-\cancel{n^2}-4n-\cancel{3}}{n^2+4n+3}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{+7n}{n^2+4n+3}<\varepsilon$$

$$\left(|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}\right)$$

DENOMINATORE È SEMPRE MAGGIORE DI 0

$$\varepsilon(n^2+4n+3)-7n>0$$

DISEQUAZIONE DI SECONDO GRADO $an^2+bn+c>0$ DOVE $a=\varepsilon>0$



$$\Rightarrow \exists N : \varepsilon(n^2+4n+3)-7n>0, \quad \forall n>N.$$

c) $a_n=\sqrt{4+\frac{1}{n+1}}$, $L=2$

Fisso $\varepsilon>0$

$$|a_n-L|<\varepsilon \Rightarrow \left|\sqrt{4+\frac{1}{n+1}}-2\right|<\varepsilon$$

OSSERVIAMO CHE

$$\sqrt{4+\frac{1}{n+1}}>\sqrt{4}=2 \Rightarrow \sqrt{4+\frac{1}{n+1}}-2>0$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+\frac{1}{n+1}}-2<\varepsilon \Rightarrow \sqrt{4+\frac{1}{n+1}}<\underbrace{\varepsilon+2}_{>0}$$

$$\Rightarrow \cancel{4+}\frac{1}{n+1}<(\varepsilon+2)^2 \Rightarrow \frac{1}{n+1}<(\varepsilon+2)^2-4$$

$$\Rightarrow \boxed{n\cancel{+1}>\frac{1}{(\varepsilon+2)^2-4}-1}$$

$$N := \frac{1}{(\varepsilon+2)^2-4} - 1$$

HO VERIFICATO CHE

$$\forall n > N \quad |a_n - L| < \varepsilon.$$

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad a_n = \log\left(\frac{n+7}{n^2+5}\right) \qquad L = -\infty$

$$\forall K > 0 \ \exists N > 0 : \boxed{a_n < -K} \text{ PER } n > N.$$

FISSO $K > 0$.

$$a_n < -K \Rightarrow \log\left(\frac{n+7}{n^2+5}\right) < -K$$

$$\Rightarrow e^{\log\left(\frac{n+7}{n^2+5}\right)} < e^{-K} \Rightarrow \frac{n+7}{n^2+5} < e^{-K}$$

$$\rightarrow (n^2+5)e^{-K} - n - 7 > 0 \rightarrow e^{-K}n^2 - n + 5e^{-K} - 7 > 0$$

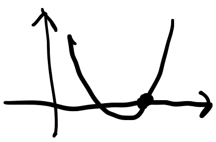
RISOLVIAMO L'EQUAZIONE ASSOCIATA

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(e^{-K})(5e^{-K}-7)}}{2e^{-K}}$$

$$n_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(e^{-K})(5e^{-K}-7)}}{2e^{-K}}$$

$1 - 4(e^{-K})(5e^{-K}-7) < 0$ - LA DISUGUAGLIANZA È VERIFICATA $\forall n$.

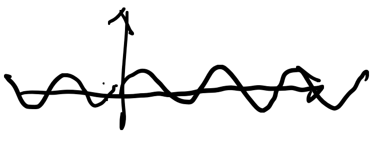
$1 - 4(e^{-K})(5e^{-K}-7) \geq 0$

$N := n_2$  $\forall n > N \quad a_n < -K.$

ES 3

a) $a_n = \sqrt{2n^2 + \sin(n) + 1} + \cos(n)$

$\lim_{n\to\infty} \sin(n)$ NON ESISTE

$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \quad \forall n$ 

$$a_n > \sqrt{2n^2 - 1 + 1} + (-1) = b_n$$

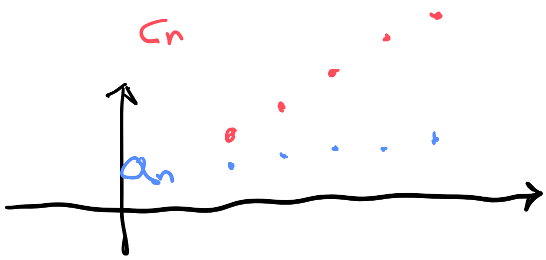
$$b_n = \sqrt{2n^2} - 1 = \sqrt{2}\, n - 1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad , \quad a_n > b_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Osservazione:

$$a_n < \sqrt{2n^2+1+1} + 1 = c_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$$



Funzioni continue

$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue $\Rightarrow$ $f+g$ è continua

$f \cdot g$ è continua

$c \cdot f$ è continua, $c \in \mathbb{R}$

Prop. Sia $f : I \longrightarrow J$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

- f è continua in $c \in I$,
- g è continua in $f(c) \in J$.

Allora $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in c.

Dim. Voglio dimostrare che $\lim_{x \to c} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(c)$, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |(g\circ f)(x) - (g\circ f)(c)| < \varepsilon \quad \text{per } |x - c| < \delta.$$

Fisso $\varepsilon > 0$. g è continua in $f(c)$ $\Rightarrow$ $\lim_{y \to f(c)} g(y) = g(f(c))$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : |g(y) - g(f(c))| < \varepsilon \quad \text{per } |y - f(c)| < \delta_1$$

f È CONTINUA IN c $\Rightarrow$ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 : |f(x) - f(c)| < \varepsilon \qquad \text{PER} \quad |x - c| < \delta$$

SCELGO $\varepsilon = \delta_1$ $\Rightarrow$

SI HA CHE

$$|x - c| < \delta \underset{\substack{\text{CONTINUITÀ} \\ \text{DI } f}}{\Rightarrow} |f(x) - f(c)| < \delta_1 \underset{\substack{\text{CONTINUITÀ} \\ \text{DI } g}}{\Rightarrow} |g(\overbrace{f(x)}^{y = f(x)}) - g(f(c))| < \varepsilon \qquad \square$$

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) \qquad g(f(c)) = (g \circ f)(c)$$

CONSEGUENZA 1

SE $f : I \to J$ È GLOBALMENTE CONTINUA SU I E

$g : J \to \mathbb{R}$ È " " SU J

ALLORA $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ È GLOB. CONTINUA SU I.

CONSEGUENZA 2

TUTTE LE FUNZIONI CHE SONO COMPOSIZIONI DI:

- FUNZIONI POLINOMIALI.
- log
- ESPONENZIALI
- FUNZ. TRIGONOMETRICHE ($\sin(x)$, $\cos(x)$)

SONO CONTINUE NEL DOMINIO SU CUI SONO DEFINITE.

ES: $f(x) = \sin\left(e^{5x^2+3} - 6x\right)$ $\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $5x^2 + 3$ CONTINUA (POLINOMIO)
- e^{5x^2+3} CONTINUA (COMPOSIZIONE)
- $e^{5x^2+3} - 6x$ CONTINUA (SOMMA)
- $f(x)$ CONTINUA (COMPOSIZIONE).

$f(x) = \cos(\log(x^2))$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NO! NON DEFINITA IN 0

f È CONTINUA, $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

FORME INDETERMINATE E LIMITI NOTEVOLI

$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty$

DEF DICIAMO CHE f È O-PICCOLO DI g PER $x \to c$ (PER $x \to \infty$)

E SCRIVIAMO $\boxed{f = o(g) \quad x \to c}$ $(x \to \infty)$

SE

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right)$$

FATTO $x \to c$

- $f = o(g) \iff f = o(Kg)$, $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f = o(g)$, $h = o(g) \Rightarrow f + h = o(g)$
- $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$

OSSERVAZIONE

$$f = o(g) \quad x \to c \iff \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \pm\infty$$

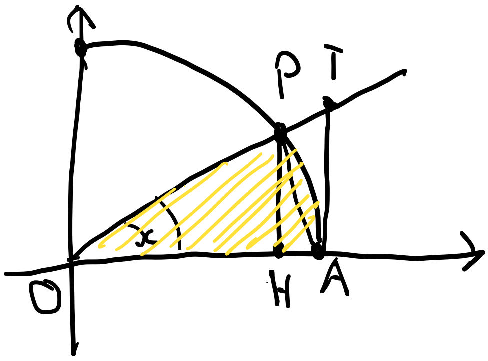
GERARCHIE PER FORME INDETERMINATE

- $\log_a(x) = o(x^\alpha) \quad x \to \infty$, $\forall a > 0, a \neq 1$, $\forall \alpha > 0$
- $x^\alpha = o(a^x) \quad x \to \infty \quad \forall a > 1, \forall \alpha > 0$
- $x^\alpha = o(x^\beta) \quad x \to \infty \quad \forall \alpha < \beta$

NON SEMPRE LE FORME INDETERMINATE SI RISOLVONO IN 0, ∞

PROP $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

DIM (GEOMETRICA) PRENDO $x \in (0, \frac{\pi}{2})$



- TRIANGOLO OPA
- SETTORE OPA
- TRIANGOLO OTA

OSSERVAZIONE

$$\overset{\triangle}{OPA} \subset \overset{\text{SETTORE}}{OPA} \subset \overset{\triangle}{OTA}$$

$\Rightarrow$ AREA $\overset{\triangle}{OPA}$ < AREA SETTORE OPA < AREA $\overset{\triangle}{OTA}$

AREA $\overset{\triangle}{OPA} = \frac{1 \cdot \sin x}{2}$

AREA $\overset{\triangle}{OTA} = \frac{1 \cdot \tan x}{2}$

SETTORE OPA : $x = \pi : 2\pi$ $\Rightarrow$ SETTORE OPA $= \frac{x}{2}$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

DIVIDO PER $\sin(x)$ (POSSO, PERCHÈ $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\sin(x) > 0$)

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

FACCIO IL RECIPROCO

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

FACCIO IL LIMITE $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1 \Rightarrow 1 < \lim_{x \to 0} \frac{\sin}{x} < 1$

PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO HO

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\square$