Ist. Mat. I – CIA
6/10/22

$\mathbb{C} = \{ a + i \cdot b \ : \ a, b \in \mathbb{R} \}$

$z = a+ib \qquad \bar{z} = a - ib \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$z = a \in \mathbb{R} \qquad |a| = \sqrt{a^2}$ = valore assoluto

$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

$z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

$z = a + ib \qquad a = \Re(z)$ parte reale

$b = \Im(z)$ parte immaginaria

(non $i \cdot b$) $\qquad \Im(z) \in \mathbb{R}$.

Oss: $\Re(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \qquad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Prop: $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Dim: $\overline{(a+ib)\cdot(c+id)} \overset{?}{=} \overline{(a+ib)} \cdot \overline{(c+id)}$

$\overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} \qquad (a-ib) \cdot (c-id)$

$(ac-bd) - i(ad+bc) \qquad ac - (-b)(-d) +$

$+ i\,(a \cdot (-d) + (-b) \cdot c)$

$ac - bd - i(ad + bc)$

Oss: $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$\overline{(a+c)+i(b+d)} \qquad (a-ib)+(c-id)$

$(a+c) - i(b+d) \qquad (a+c) - i(b+d)$

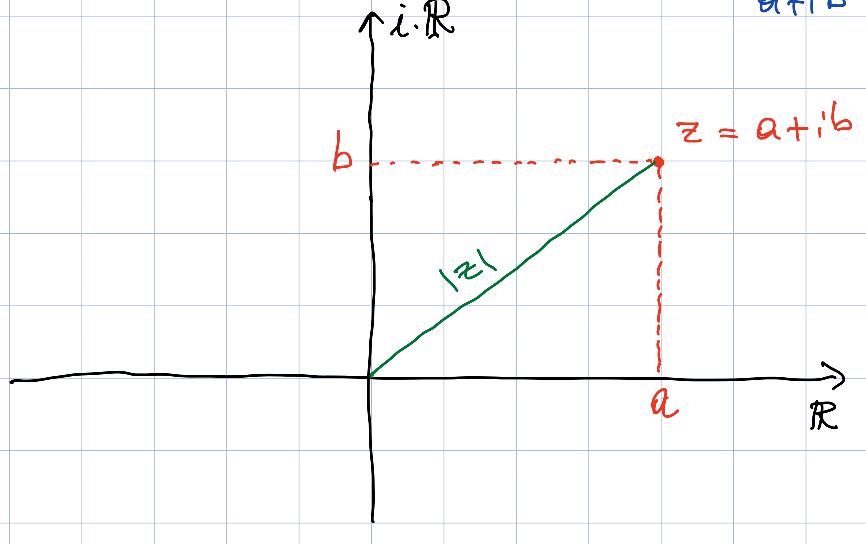
$\blacksquare$

Conseguenza: $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

$$|z\cdot w| = \sqrt{(z\cdot w)\cdot\overline{(z\cdot w)}} = \sqrt{z\cdot w\cdot\bar z\cdot\bar w}$$
$$= \sqrt{(z\cdot\bar z)\cdot(w\cdot\bar w)} = \sqrt{|z|^2\cdot|w|^2} = |z|\cdot|w|$$

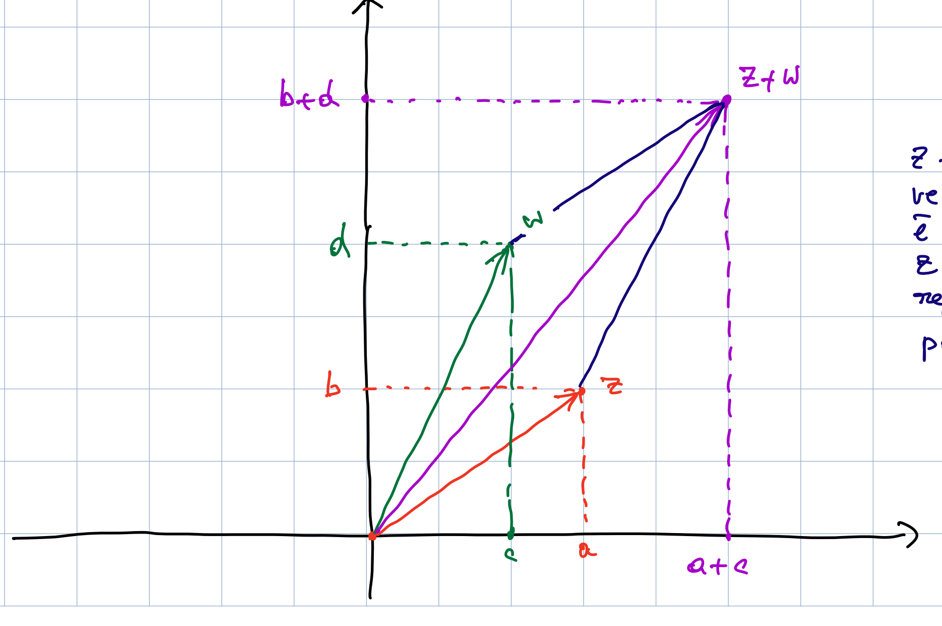
Il piano complesso. $\mathbb{C} = \{a+ib : a,b\in\mathbb{R}\} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$

$a+ib \longleftrightarrow (a,b)$



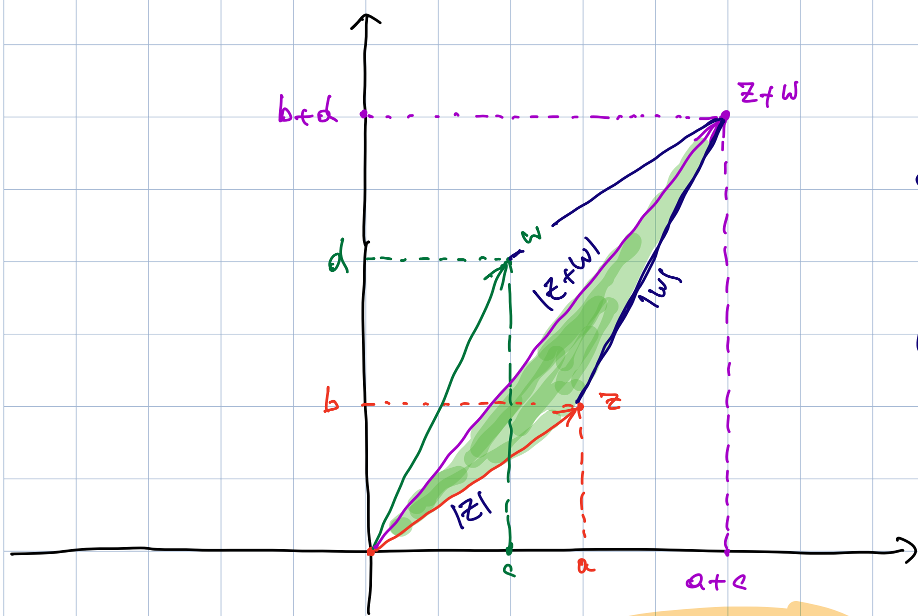
$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$z = a+ib \qquad w = c+id \qquad z+w = (a+c)+i(b+d)$



$z+w$ come vettore di $\mathbb{R}^2$ è ottenuto da z, w con la regola del parallelogramma

Prop: $|z+w| \leq |z|+|w|$ e l'uguaglianza vale se e solo se uno dei due è $k \cdot$ l'altro, $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$



disuguaglianza triangolare (estende quella di $\mathbb{R}$)

Oss: $|z| \geq 0$; $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)|$; $|z| \geq |\mathrm{Im}(z)|$

$\sqrt{a^2+b^2} \geq |a|$ $\qquad$ $\sqrt{a^2+b^2} \geq |b|$

$|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

$\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$

Verifico $|z+w| \leq |z|+|w|$ $\qquad$ (Esercizio: discutere il caso $=$)

Oss: $\overline{\overline{z}} = z$

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)}$$
$$= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})$$
$$= \underbrace{z \cdot \overline{z}}_{=|z|^2} + z \cdot \overline{w} + \underbrace{\overline{z} \cdot w}_{=\overline{z \cdot \overline{w}}} + \underbrace{w \cdot \overline{w}}_{=|w|^2}$$
$$= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w}) + |w|^2$$

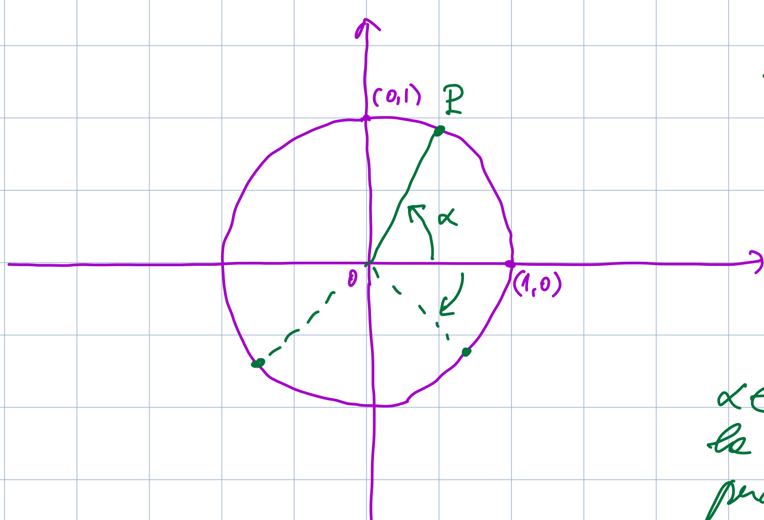
$$\leq |z|^2 + 2|z\cdot\overline{w}| + |w|^2$$
$$= |z|^2 + 2|z|\cdot|\overline{w}| + |w|^2$$
$$= |z|^2 + 2\cdot|z|\cdot|w| + |w|^2$$
$$= (|z|+|w|)^2$$

Oss: $|\overline{z}| = |z|$

$$\Longrightarrow |z+w| \leq |z| + |w|$$

$z+w$ = regola del parallelogramma

$z \cdot w$ = ?



$\alpha \in \mathbb{R}$ misura in radianti dell'angolo

$\alpha = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow (0,1)$

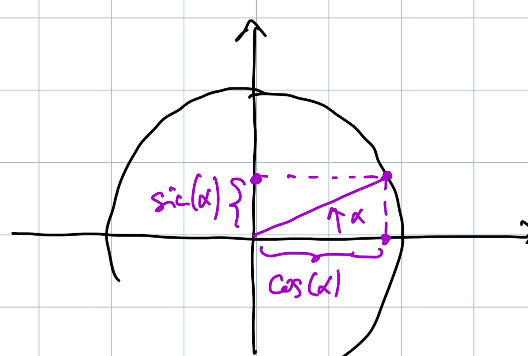
$\alpha = \pi \leftrightarrow (-1,0)$

$\alpha = \frac{5}{4} \leftrightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\alpha \in \mathbb{R}$ pensando la circonferenza percorsa con periodicità 2π

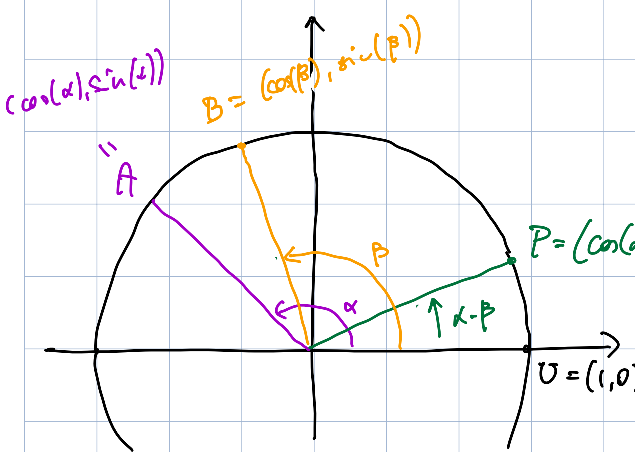
$\alpha = -\frac{9}{4}\pi \Leftrightarrow P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Def: se $\alpha \in \mathbb{R}$ e P è il punto che gli corrisponde, chiamo $\cos(\alpha), \sin(\alpha)$ le coordinate di P.



Fatto:
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta).$$

Verifico che $\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$



$$\overset{\frown}{UB} = \overset{\frown}{PA} \Rightarrow \overline{UB} = \overline{PA}$$
$$\Rightarrow \overline{UB}^2 = \overline{PA}$$

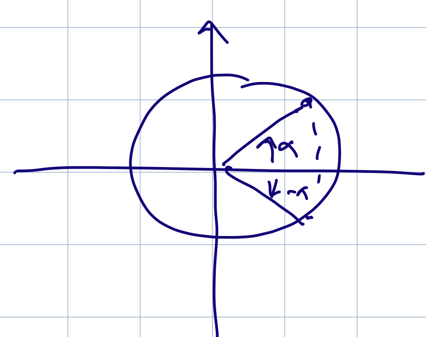
$$(\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2$$
$$= (\cos(\alpha)-\cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha)-\sin(\beta))^2$$

$$\cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta) = \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos^2(\beta)$$
$$+ \sin^2(\alpha) - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin^2(\beta)$$
$$2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)).$$

∎

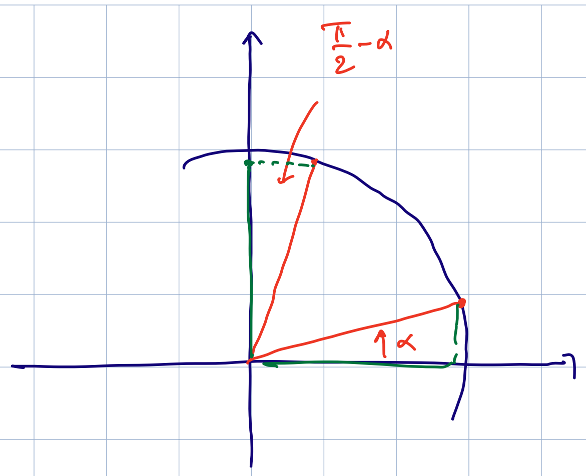
Le formule per $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha\pm\beta)$ si ricavano da:

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

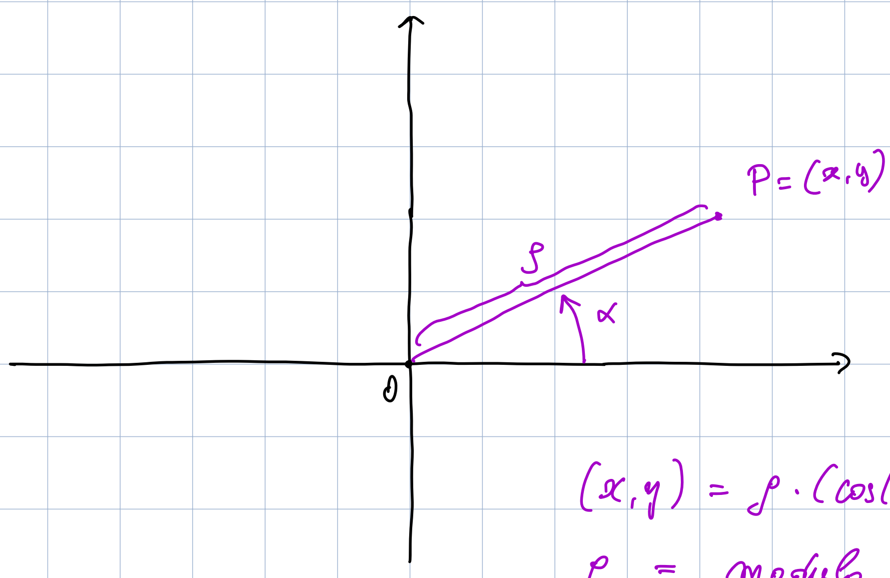


$\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$



Coordinate polari nel piano cartesiano:



$(x, y) = \rho \cdot (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

ρ = modulo

α = argomento

Oss: se $P = O$ ho $\rho = 0$, α non è definito (qualsiasi α va bene)

Oss: se $P \neq 0$, α è definito a meno di multipli interi di 2π

Uso le coord. polari per descrivere i punti di $\mathbb{C}$ visto come $\mathbb{R}^2$:

$$(a,b) = \rho\cdot(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$$
$$\updownarrow$$
$$z = a+ib = \rho\cdot(\cos(\vartheta)+i\cdot\sin(\vartheta))$$
$$= |z|\cdot(\cos(\vartheta)+i\cdot\sin(\vartheta))$$

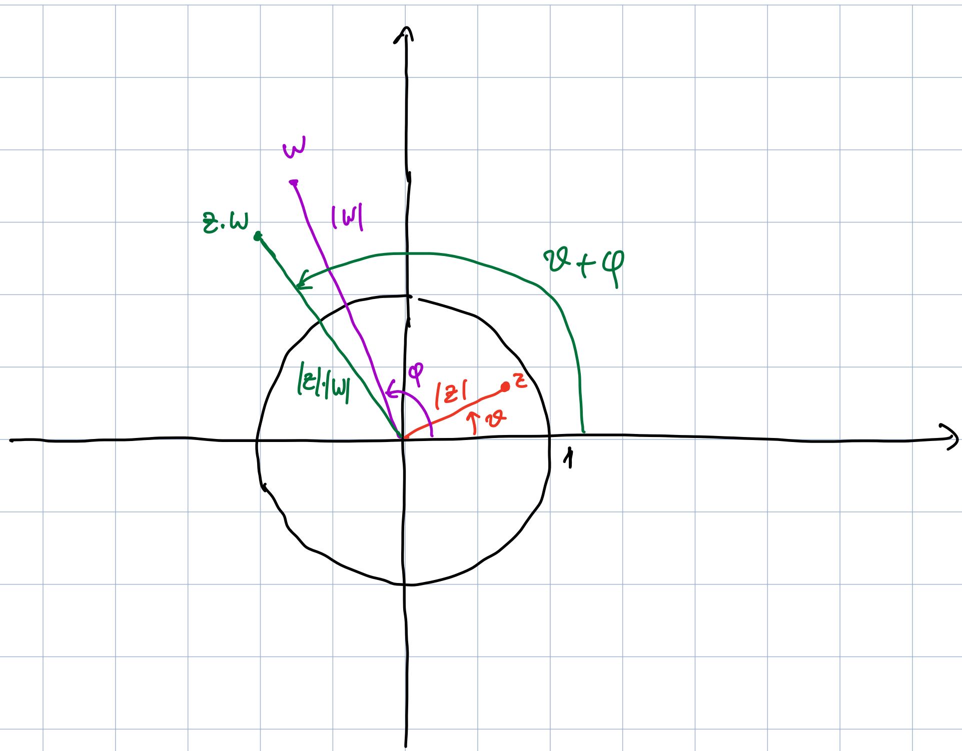
ϑ "=" $\arg(z)$ argomento

$$z = |z|\cdot(\cos(\vartheta)+i\cdot\sin(\vartheta))$$
$$w = |w|\cdot(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi))$$

$$z\cdot w = \underbrace{|z|\cdot|w|}_{|z\cdot w|}\cdot\Big(\underbrace{\cos(\vartheta)\cdot\cos(\varphi)-\sin(\vartheta)\cdot\sin(\varphi)}_{\cos(\vartheta+\varphi)}$$
$$+\, i\cdot\big(\underbrace{\cos(\vartheta)\cdot\sin(\varphi)+\sin(\vartheta)\cdot\cos(\varphi)}_{\sin(\vartheta+\varphi)}\big)\Big)$$

$$= |z\cdot w|\cdot(\cos(\vartheta+\varphi)+i\cdot\sin(\vartheta+\varphi))$$

$$\Longrightarrow |z\cdot w| = |z|\cdot|w|$$
$$\arg(z\cdot w) = \arg(z)+\arg(w)$$



Oss: $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a^x$$

Sappiamo $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

$$\boxed{\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)}$$

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$E(\vartheta) = \cos(\vartheta) + i \cdot \sin(\vartheta)$$

Visto sopra: $E(\vartheta) \cdot E(\varphi) = E(\vartheta + \varphi)$

$$\boxed{E(\vartheta + \varphi) = E(\vartheta) \cdot E(\varphi)}$$

Q: sarà unica $E(\vartheta) = (?)^{\vartheta}$ $\qquad ? \notin \mathbb{R}$

Convenzione (motivata tra un momento):

$$\cos(\vartheta) + i \cdot \sin(\vartheta) = e^{i\vartheta}$$

$$z = a+ib = |z| \cdot (\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)) = |z| \cdot e^{i\vartheta}$$

$z = |z| e^{i\vartheta}$, $w = |w| \cdot e^{i\varphi}$

$\Rightarrow z \cdot w = |z \cdot w| \cdot e^{i(\vartheta+\varphi)}$.

Polinomi a coeff. reali in una indeterminata x:

monomio

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_d \cdot x^d : d \in \mathbb{N},\ a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R} \right\}$$

$x \notin \mathbb{R}$ simbolo

Convenzione: i monomi con coeff. 0 si posso inserire o cancellare a volontà

Es: $\sqrt{5} - 7\pi x^2 = \sqrt{5} + 0 \cdot x - 7\pi \cdot x^2$

$1 - 3x + 5\sqrt{7} \cdot x^2 = 1 - 3x + 5\sqrt{7} x^2 + 0 \cdot x^3$

Operazioni sui polinomi:

$+ : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$

sommando i coeff dei monomi dello stesso grado

$\cdot : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$

si usa $(a \cdot x^k) \cdot (b \cdot x^h) = a \cdot b \cdot x^{k+h}$

e poi si usa la distributiva

Oss: $\mathbb{R}[x]$ non è un campo: valgono tutte le proprietà 1-9 tranne esistenza dell'inverso molt.

Dato $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomio posso associargli una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \longmapsto p(a)$ ottenuta sostituendo simbolo x con numero a e facendo operazioni.

Equazione polinomiale:

dato $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ l'equazione

$$p(x) = 0$$

ha come soluzioni (radici di $p(x)$) i numeri $a \in \mathbb{R}$ t.c. $p(a) = 0$.

Grado I: $a \cdot x + b = 0$ $a \neq 0$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Grado II: $ax^2+bx+c=0 \quad a\neq 0$

$\Delta = b^2-4ac$ discriminante

$\Delta<0$ nessuna soluzione; altrimenti

$$\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Fatto: ci sono formule risolutive generali per gradi III e IV (complicate), non $\geq$ V

Fatto: dato $p(x) = a_d \cdot x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_j \in \mathbb{Z}$ $\forall j$ se $p(x)$ ha una radice razionale è del tipo $\frac{b}{c}$ con $b, c \in \mathbb{Z}$ b divisore di a_0, c divisore di a_d.

Esempio: $6x^7 - 14x^3 + 11x^2 - 35 = 0$

può avere soluzioni intere solo

$$\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{7}{2}$$

$$\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{7}{3}$$