Ist. Mat. I - CIA
29/9/22

Mec. 5 : 9:00 - 10:45

Valore assoluto : $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Oss : $-|x| \leq x \leq |x|$

Prop (disuguaglianza triangolare) : $|x+y| \leq |x|+|y|$

Infatti :
$$\begin{array}{c} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \\ \hline -(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y| \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad |x+y| \leq |x|+|y|$$

Esercizio : verificarlo distinguendo i casi $x \geq 0$, $x < 0$; $y \geq 0$, $y < 0$

Es : $|3+7| = |3|+|7|$

$|7+(-4)| < |7|+|-4|$

Calcolo combinatorio : "contare certe configurazioni"

Permutazioni : in quanti modi si possono ordinare gli elementi di un insieme $X = \{x_1, \dots, x_n\}$?

Stesso che: quante sono le $f : \{1, \dots, n\} \to X$ bijettive?

Stesso che: quante sono le $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijettive?

Risposta : $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ fattoriale.

Permutazioni con ripetizione :

in quanti modi posso ordinare gli el. di $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ in modo che x_j si ripeta k_j volte?

Es : in quali ordini posso trovare i semi di un mazzo di carte da 40?

$n = 4$, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 10$

Risposta :

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Per i semi :

$$\frac{40!}{(10!)^4} \cong 4.7 \cdot 10^{21}$$

Disposizioni: in quanti modi si possono scegliere k elementi distinti e ordinati in $X = \{x_1, \dots, x_n\}$?

Risposta: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)\cancel{(n-k)}\ldots\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{(n-k)}\ldots\cancel{2}\cdot\cancel{1}}$$

Es: scegliere 3 elementi in $X = \{x_1, \dots, x_5\}$

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \qquad 3 = 5-3+1$$

Disposizioni con ripetizione: in quanti modi posso scegliere k elementi ordinati in $X = \{x_1, \dots, x_n\}$?

Risposta: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$

Combinazioni: in quanti modi posso scegliere k elementi distinti ma <u>non ordinati</u> in $X = \{x_1, \dots, x_n\}$?

Stesso che: quanti sono i sottoinsiemi con k elementi di $X = \{x_1, \dots, x_n\}$?

Es: sottoinsiemi con 2 elementi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {4,5}

Risposta: so che quelli ordinati sono $\frac{n!}{(n-k)!}$

dunque: $\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Es: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot 2\cdot 1}{(\cancel{2}\cdot 1)\cdot(\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1)} = 10$

$\boxed{\binom{n}{k}}$ è detto coefficiente binomiale:

Prop: $\boxed{(x+y)^n} = \boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot y^{n-k}}$

Convenzione: $0! = 1$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\cdot n!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = 1$$

Spiegazione della formula per $(x+y)^n$

$$\underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ \ldots\ \cdot(x+y)\cdot(x+y)}_{n \text{ volte}}$$

$= 2^n$ addendi ognuno del tipo

$x^0\cdot y^n,\ x\cdot y^{n-1},\ x^2\cdot y^{n-2},\ldots,\ x^k\cdot y^{n-k},\ldots x^n\cdot y^0$

ma sono ripetuti:

$x^k\cdot y^{n-k}$ si ripete perché esce ogni volta che ho scelto k volte x e $n-k$ volte y.

$(x+y)^5$

$= (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$

$= \ldots\ \ x^2\cdot y^3\ \ \ldots$

$\Rightarrow$ $x^k\cdot y^{n-k}$ compare tante volte quante sono le scelte di k el. non ordinati su n

$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Conseguenza: se $|X| = n$ allora $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$

Infatti $|\mathcal{P}(X)| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \boxed{\left|\{\text{sottoinsiemi di } X \text{ con } k \text{ el.}\}\right|}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{n-k}}$$

$$= (1+1)^n$$

la formula di $(x+y)^n$ con $x = 1,\ y = 1$

Oss: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \; ; \; \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Prop: $\underbrace{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}_{} = \binom{n}{k}$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,((n-1)-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{\cancel{k} + n - \cancel{k}}{k \cdot (n-k)} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Triangolo di Tartaglia:

$n=0$ —— 1

$n=1$ —— 1 1

$n=2$ —— 1 2 1

$n=3$ —— 1 ($k=0$) 3 ($k=1$) 3 ($k=2$) 1 ($k=3$)

$n=4$ —— 1 4 6 4 1

$n=5$ —— 1 5 $\boxed{10}$ 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

$$\binom{6}{2} = 15 \quad \text{infatti} \quad \binom{6}{2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}$$

Combinazioni con ripezione :

in quanti modi si possono scegliere k el. non ordinati su n anche con ripetizioni.

Risposta :
$$\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Ragione : scegliere k distinti tra $1, \dots, n$

= scegliere $x_1, \dots, x_k$ con

$$1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k \leq n \,.$$

Scegliere k non distinti tra 1 e n

= scegliere $x_1, \dots, x_k$ con

$$1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{k-1} \leq x_k \leq n$$

Se sostituisco x_j con $x_j + j - 1 = y_j$ ho

$$1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_{k-1} < y_k \leq n - k + 1$$

$$\Rightarrow \binom{n-k+1}{k}.$$

$$\underset{\text{mancano opposti e inversi}}{\mathbb{N}}, \underset{\text{mancano inversi}}{\mathbb{Z}}, \underbrace{\mathbb{Q}, \mathbb{R}}_{\text{stesse proprietà algebriche per } +, \cdot}$$

Nel seguito X è $\mathbb{Q}$ oppure $\mathbb{R}$.

Def: $A \subset X$ è $\overset{\text{inferiormente}}{\text{superiormente}}$ limitato se $\exists\, x \in X$ t.c. $\underset{a \geq x}{a \leq x}$ $\forall a \in A$.

Def: dato $A \subset X$ chiamo $\overset{m}{M}$ il $\overset{\text{minimo}}{\text{massimo}}$ di A (se esiste) un numero t.c. $\underset{m \in A}{M \in A}$, $\underset{a \geq m}{a \leq M}$ $\forall a \in A$.

Esempi:
- $\mathbb{N} \subset X$ è limitato inferiormente ma non superiormente
- $A = \{x \in X : 0 < x \leq 1\}$ ha $\max = 1$ ma non ha min

Se avesse $\min = m$ avrei $m > 0$ ma allora $\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow \frac{m}{2} \in A$ e $\frac{m}{2} < m$ dunque m non è il minimo.

Def: dato $A \subseteq X$ chiamo estremo superiore $\sup(A)$ un numero $S \in X$ se esiste t.c.

- $a \leq S \quad \forall a \in A$ — S è più grande di tutti gli el. di A
- $\forall y < S \quad \exists a \in A$ t.c. $a > y$ — è il numero più piccolo con tale proprietà

Estremo inferiore $\inf(A)$ è $s \in X$ t.c.

- $s \leq a \quad \forall a \in A$
- $\forall y > s \quad \exists a \in A$ t.c. $a < y$

Esempio: $A = \{ x \in X : 0 \leq x < 1 \}$

$0 = \min(A) = \inf(A)$

$1 = \sup(A)$, A non ha max

Ese: se esistono $\max(A)$ / $\min(A)$
allora $\sup(A) = \max(A)$ / $\inf(A) = \min(A)$

Fatto: non tutti gli $A \subset \mathbb{Q}$ superiormente limitati hanno sup.

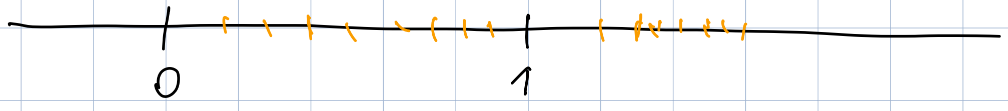
Esempio: $\{ x \in \mathbb{Q} \, ; \, x \geq 0 , \, x^2 < 2 \}$
è sup. lim. ma non ha sup. in $\mathbb{Q}$

Esercizio: se avesse $\sup = S$ dovrebbe essere $S^2 = 2$ ma non esistono razionali con quadrato 2.

Fatto: ogni $A \subset \mathbb{R}$ sup. lim. ha sup.

(proprietà di completezza di $\mathbb{R}$).

Es: $\sup \{ x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, \ x^2 \leq 2 \} = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



Funzioni elementari: potenze (tutto su $\mathbb{R}$)

$a > 0 \qquad a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \qquad n \in \mathbb{N}$

$a > 0 \qquad$ definisco $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = \sup \{ \underset{x \geq 0}{x \in \mathbb{Q} : x^n \leq a} \}$

$a > 0 \qquad$ definisco $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a>0$, $x\in\mathbb{R}$ definisco $a^x = \sup\{a^q : q\in\mathbb{Q}, q\le x\}$

Proprietà delle potenze a^x , $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $x\in\mathbb{R}$

- $a^0 = 1$, $1^x = 1$
- $a^x > 0$

- $a^x > 1$ se $a>1, x>0$ oppure $a<1, x<0$
  $a^x < 1$ se $a<1, x>0$ oppure $a>1, x<0$

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$

- $x<y \Longrightarrow \begin{cases} a^x < a^y & \text{se } a>1 \\ a^x > a^y & \text{se } a<1 \end{cases}$

- $a<b \Longrightarrow a^x < b^x$

Def: dato $a>0$, $a\neq 1$ chiamo per $y\in\mathbb{R}$, $y>0$ $\log_a(y)$ il numero x che soddisfa $a^x=y$.

Fatto: $\underbrace{\text{esiste}}_{\text{non facile}}$ ed $\underbrace{\text{è unico}}_{\text{facile}}$.

Es:

$$\log_2(8) = 3$$

$$\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$$

$$\log_{81}(3) = \frac{1}{4}$$

$$\log_{16}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$