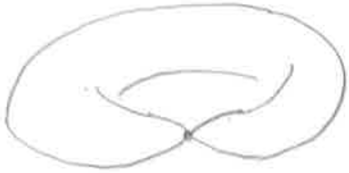
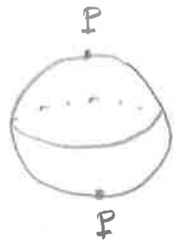
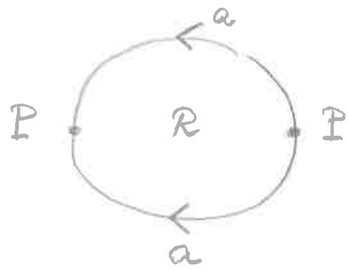
Esercizî

① Calcolare $H_*(X;G)$ dove

$$X = S^1 \times S^1 / _{S^1 \times \{pt\}}.$$

Soluzione: $X \simeq$  $\cong$ 

$\cong$



$$H_j(X;G) = \begin{cases} G & j = 0,1,2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Leftarrow \begin{matrix} \partial a = 0 \\ \partial R = 0 \end{matrix} \Leftarrow$$

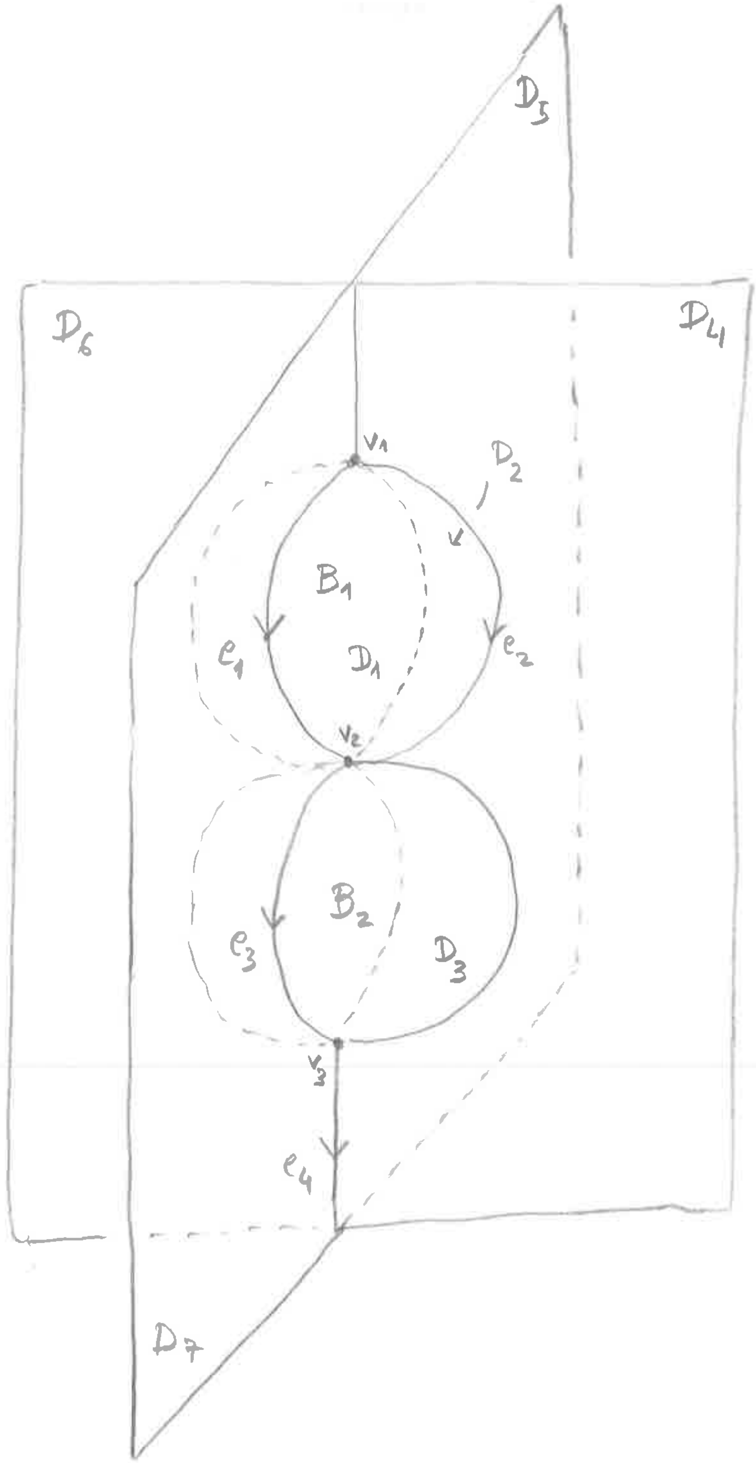
② Calcolare $H_*(Y;\mathbb{Z})$ dove

$$S^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$X = \{\infty\} \cup \{(z,t) : (1-|t|)^2 + |z|^2 \leq 1\} \cup \{(z,t) : Re(z) \cdot Im(z) = 0\} \subset S^3$$

$$Y = X / _{\substack{(z,t) \sim (s,w) \text{ se} \\ s=t>0,\ (1-t)^2+|z|^2=1,\ z^2=w^2 \\ s=t<0,\ (1+t)^2+|z|^2=1,\ z^4=w^4}}$$

Soluzione: La parte al finito di X consiste dei due piani coordinati verticali e delle due palle di raggio 1 e centri $(0,0,\pm 1)$. Inoltre Y si ricava da X tramite l'azione della rotazione di angolo π intorno all'asse verticale sul bordo della palla superiore, e di angolo $\pi/2$ sul bordo di quella inferiore. Allora Y ha la seguente naturale presentazione come complesso cellulare:



$$\partial_1 : \begin{aligned} e_1 &\longmapsto v_2 - v_1 \\ e_2 &\longmapsto v_2 - v_1 \\ e_3 &\longmapsto v_3 - v_2 \\ e_4 &\longmapsto v_1 - v_4 \end{aligned}$$

$$\partial_2 : \begin{aligned} D_1 &\longmapsto e_1 - e_2 \\ D_2 &\longmapsto e_2 - e_1 \\ D_3 &\longmapsto 0 \\ D_4 &\longmapsto e_2 + e_3 + e_4 \\ D_5 &\longmapsto e_1 + e_3 + e_4 \\ D_6 &\longmapsto -e_2 - e_3 - e_4 \\ D_7 &\longmapsto -e_1 - e_3 - e_4 \end{aligned}$$

$$\partial_3 : \begin{aligned} B_1 &\longmapsto 2D_1 + 2D_2 \\ B_2 &\longmapsto 4D_3 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad H_0 = \mathbb{Z}\langle v_1 \rangle$$

$$H_1 = \frac{\langle e_1 - e_2,\ e_1 + e_3 + e_4 \rangle}{\underset{\text{"}}{}} = 0$$

$$H_2 = \frac{\langle D_1 + D_2,\ D_3,\ D_4 + D_6,\ D_5 + D_7,\ D_1 + D_4 - D_5 \rangle}{2(D_1 + D_2),\ 4D_3}$$

$$= \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}^3$$

$$H_3 = 0.$$

(3) Considerare un poligono di vertici $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ e la bipiramide su di esso di vertici S, N. Detto L_m il quoziente della bipiramide modulo le identificazioni

$$N A_j A_{j+1} = S A_{j+1} A_{j+2}$$

provare che L_m è una 3-varietà PL orientabile e calcolare $H_*(L_m)$.

<u>Soluzione</u>: è chiaro che il link di un punto che viene dalla parte interna della bipiramide è S^2. Per un punto che viene dalla parte interna di un triangolo ho due D^2 uniti per il bordo, dunque S^2. Per un punto interno a un lato $NA_j = SA_{j+1}$ è lo stesso. Per un punto interno del lato A_jA_{j+1} ho

$= S^2.$

Per il vertice $S=N$ ho $D^2 \cup_\partial D^2 = S^2$. Per il vertice $A_0 = A_1 = \dots = A_{m-1}$ ho

Inoltre ogni incollamento $NA_jA_{j+1} \longrightarrow SA_{j+1}A_{j+2}$ inverte l'orientazione indotta dalla bipiramide, dunque L_m è orientabile. Abbiamo una struttura cellulare con celle:

0 : $A = A_0 = \dots = A_{m-1}$ $\quad P = N = S$

1 : $\alpha = A_jA_{j+1}$ $\quad \beta_j = A_jN = A_{j+1}S$ $\quad j = 0, \dots, m-1$

2 : $T_j = NA_jA_{j+1} = SA_{j+1}A_{j+2}$ $\quad j = 0, \dots, m-1$

3 : B bipiramide

(Nota : $\chi = 2 - (m+1) + m - 1 = 0$ come atteso per una 3-varietà orientabile.)

Inoltre $\partial_1 : \alpha \mapsto 0 \quad \beta_j \mapsto P - A$

$\partial_2 : T_j \mapsto \alpha + \beta_{j+1} - \beta_j$

$\partial_3 : B \mapsto 0$

$\Longrightarrow H_0 = \dfrac{\langle P, A \rangle}{P - A} = \mathbb{Z}$; $\quad H_2 = 0$; $\quad H_3 = \mathbb{Z}$

$$H_1 = \frac{\langle \alpha, \beta_j - \beta_{j+1} \; : \; j = 0, \dots, m-2 \rangle}{\alpha - (\beta_j - \beta_{j+1}) \quad j = 0, \dots, m-1} = \mathbb{Z}/m$$

(uso le relazioni

$$\alpha - (\beta_j - \beta_{j+1}) \qquad j = 0, \dots, m-2$$

per ricondurmi a $\langle \alpha \rangle$ / ultima relazione

e ora l'ultima relazione è

$$\alpha - (\beta_{m-1} - \beta_0) = \alpha + (\beta_0 - \beta_1) + (\beta_1 - \beta_2) + \dots + (\beta_{m-2} - \beta_{m-1})$$
$$= m \cdot \alpha. \;)$$

(4) Calcolare $H_*(\Sigma_g, A)$ con $\# A = m$.

<u>Soluzione</u>:

$$\underset{\underset{0}{\|}}{H_2(A)} \to \underset{\underset{\mathbb{Z}}{\|}}{H_2(\Sigma_g)} \to H_2(\Sigma_g, A) \to \underset{\underset{0}{\|}}{H_1(A)} \to H_1(\Sigma_g) = \mathbb{Z}^{2g}$$

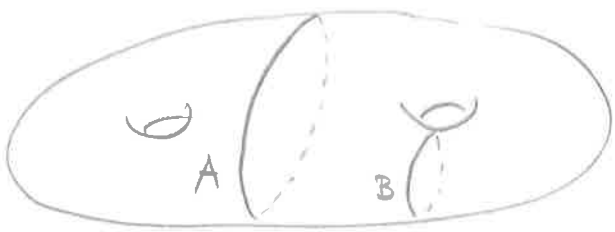
$$\downarrow$$
$$H_1(\Sigma_g, A)$$
$$\downarrow p$$
$$\tilde{H}_0(A) = \mathbb{Z}^{m-1}$$
$$\downarrow$$
$$\tilde{H}_0(\Sigma_g) = 0$$

$\Rightarrow H_2(\Sigma_g, A) = \mathbb{Z}$

p splitta perché $\tilde{H}_0(A)$ è libero

$\Rightarrow H_1(\Sigma_g, A) = \mathbb{Z}^{2g+m-1}$

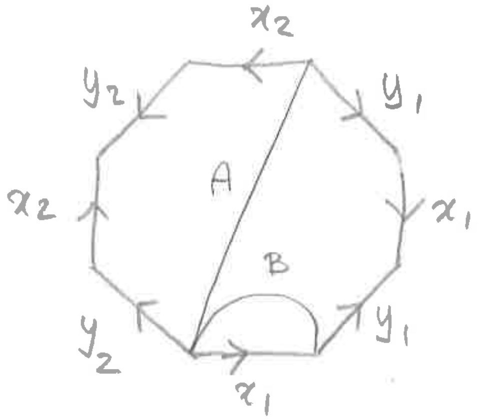
(5) Calcolare $H_*(\Sigma_2, A)$ e $H_*(\Sigma_2, B)$ con



Soluzione: per $C \in \{A, B\}$ ho

$$\begin{tikzcd}
H_2(C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_2(\Sigma_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_2(\Sigma_2, C) \arrow[r] & H_1(C) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, equal] & H_1(\Sigma_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_1(\Sigma_2, C) \arrow[d] \\
0 & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}^4 & \tilde{H}_0(C) = 0
\end{tikzcd}$$

dunque tutto dipende da j_*:



$\Rightarrow j_* = 0$ per $C = A$

$j_*(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per $C = B$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} 0 \to \mathbb{Z} \to H_2(\Sigma_2, A) \to \mathbb{Z} \to 0 \\ 0 \to \mathbb{Z}^4 \to H_1(\Sigma_2, A) \to 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} H_2(\Sigma_2, A) = \mathbb{Z}^2 \\ H_1(\Sigma_2, A) = \mathbb{Z}^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 \to \mathbb{Z} \to H_2(\Sigma_2, B) \to 0 \\ 0 \to \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^4 \to H_1(\Sigma_2, B) \to 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} H_2(\Sigma_2, B) = \mathbb{Z} \\ H_1(\Sigma_2, B) = \mathbb{Z}^3. \end{array}$$

6. Provare che se $\alpha, \beta \subset \Sigma_g$ sono curve semplici chiuse non separanti esiste $h \in \mathrm{Aut}(\Sigma_g)$ con $h(\alpha) = \beta$.

Soluzione: se taglio Σ_g lungo α o β e attacco due D^2 trovo una superficie orientabile di caratteristica di Eulero $\chi(\Sigma_g) + 2 = 2(1-g) + 2 = 2(1-(g-1))$, dunque in entrambi i casi la superficie orientabile di genere $g-1$, grazie al teorema di classificazione. Ora dentro Σ_{g-1} ho dischi $\Delta_\alpha^{(1)}, \Delta_\alpha^{(2)}, \Delta_\beta^{(1)}, \Delta_\beta^{(2)}$ e posso trovare $f \in Aut(\Sigma_{g-1})$ t.c. $f(\Delta_\alpha^{(j)}) = \Delta_\beta^{(j)}$ (più una condizione ovvia su $\partial\Delta_\alpha^{(j)} \to \partial\Delta_\beta^{(j)}$ che non esplicito) e allora $f|_{\Sigma_{g-1} \setminus (\mathring{\Delta}_\alpha^{(1)} \cup \mathring{\Delta}_\alpha^{(2)})}$ induce la h voluta. (La condizione inespressa è che reincollando $\partial\Delta_\alpha^{(1)}$ con $\partial\Delta_\alpha^{(2)}$ viene una h ben definita).

⑦ Calcolare $H_1(\mathbb{R},\mathbb{Q};\mathbb{Z})$

Soluzione:

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_1(\mathbb{R})} \longrightarrow H_1(\mathbb{R},\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \underset{\substack{\| \\ \{\alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Q}} \,:\, \#\{q : \alpha(q)\neq 0\}<+\infty,\ \sum_{q\in\mathbb{Q}} \alpha(q)=0\}}}{\tilde{H}_0(\mathbb{Q})} \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{\tilde{H}_0(\mathbb{R})}$$

= gruppo liberamente generato da

$$\hat{q} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & x = q \\ -1 & x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

al variare di $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

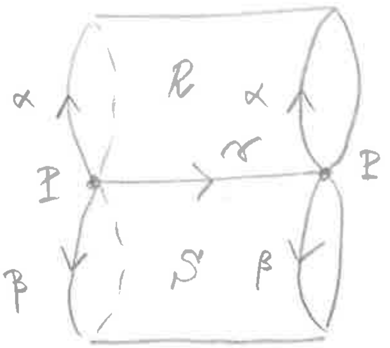
⑧ Provare che ogni $f : \mathbb{P}^{2n}(\mathbb{R}) \circlearrowleft$ continua ha punti fissi, e che non è vero per $f : \mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R}) \circlearrowleft$.

Soluzione: Sollevo a $\tilde{f} : S^{2n} \to S^{2n}$. Se $\tilde{f}(x)$ fosse sempre diverso da x e da $-x$ avrei $\tilde{f} \simeq -id$ e $\tilde{f} \simeq id$, ma $id \not\simeq -id$ su S^{2n}. Nel caso $2n+1$ si prende f indotta da

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

(9) Calcolare $H_*(S^1 \times (S^1 \vee S^1))$.

Soluzione: Direttamente abbiamo



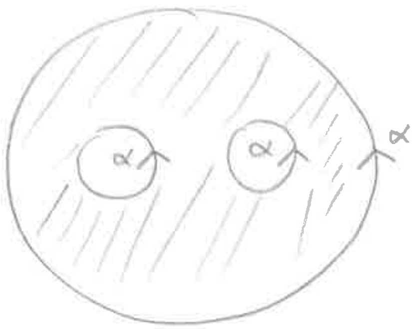
$$\partial\alpha = \partial\beta = \partial\gamma = 0$$
$$\partial R = \partial S = 0$$
$$\Longrightarrow H_0 = \mathbb{Z},\ H_1 = \mathbb{Z}^3,\ H_2 = \mathbb{Z}^2$$

Con Künneth abbiamo solo i $\otimes$ e niente Tor, e

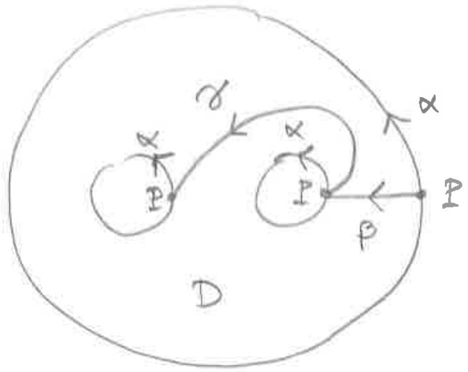
$$\begin{array}{r|cc}
 & H_0(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z} & H_1(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z}^2 \\
\hline
H_0(S^1) = \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}^2 \\
H_1(S^1) = \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}^2
\end{array}$$

$0 \quad 1 \quad 2$

(10) Calcolare H_*



Soluzione:



$\partial\alpha = \partial\beta = \partial\gamma = 0$

$\partial D = \alpha + \beta - \alpha + \gamma - \alpha - \gamma - \beta$
$= -\alpha$

$\Longrightarrow H_0 = \mathbb{Z}, \quad H_1 = \mathbb{Z}^2, \quad H_2 = 0$

(11) Calcolare $H_*(X)$ con $X = S^3 /_{\substack{x \sim -x \\ \text{se } x \in S^2 \times \{0\}}}$

Soluzione: E' $\mathbb{P}^3 \cup_{\mathbb{P}} \mathbb{P}^3$ dunque posso usare MV (fatto direttamente con le celle sarebbe più facile):

$$\begin{array}{l} H_3(\mathbb{P}^2) = 0 \\ \downarrow \\ H_3(\mathbb{P}^3) \oplus H_3(\mathbb{P}^3) = \mathbb{Z}^2 \\ \downarrow \\ H_3(X) \\ \downarrow \\ H_2(\mathbb{P}^2) = 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \quad H_3(X) = \mathbb{Z}^2$$

$$
\begin{array}{l}
H_2(\mathbb{P}^3) \oplus H_2(\mathbb{P}^3) = 0 \\
\downarrow \\
H_2(X) \\
\downarrow \\
H_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}/2 \\
\downarrow \\
H_1(\mathbb{P}^3) \oplus H_1(\mathbb{P}^3) = (\mathbb{Z}/2)^2 \\
\downarrow \\
H_1(X) \\
\downarrow \\
\tilde{H}_0(\mathbb{P}^2) = 0
\end{array}
$$

questa è la mappa $1 \longmapsto (1,1)$

$\Uparrow$ $H_2(X) = 0$

$\Downarrow$ $H_1(X) = \mathbb{Z}/2$

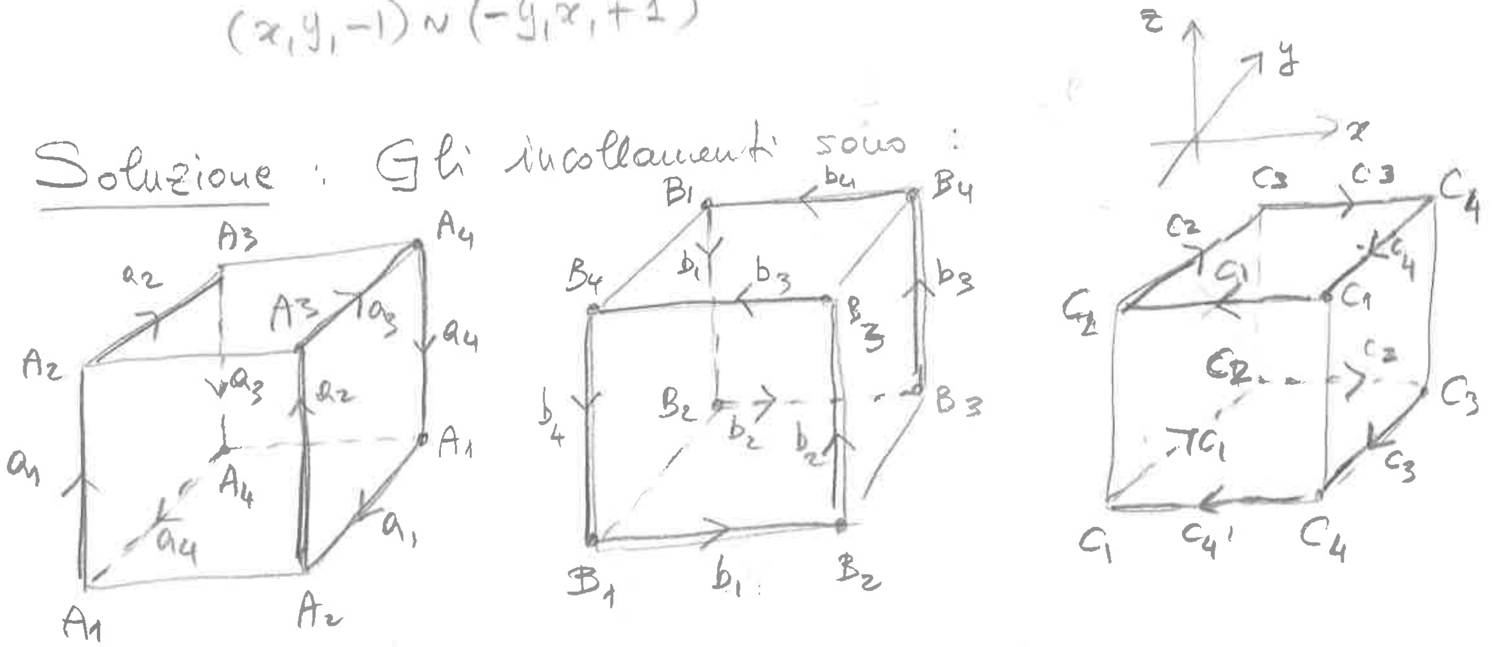
(12) Calcolare $H_*(X)$ dove $X = [-1,1]^3/\sim$

$(-1,y,z) \sim (+1,-z,y)$

$(x,-1,z) \sim (z,+1,-x)$

$(x,y,-1) \sim (-y,x,+1)$

<u>Soluzione</u>: Gli incollamenti sono:



$$\Rightarrow \quad A_1 = B_1 = C_1 = A_3 = B_3 = C_3 \quad =: P$$
$$A_2 = B_2 = C_2 = A_4 = B_4 = C_4 \quad =: Q$$

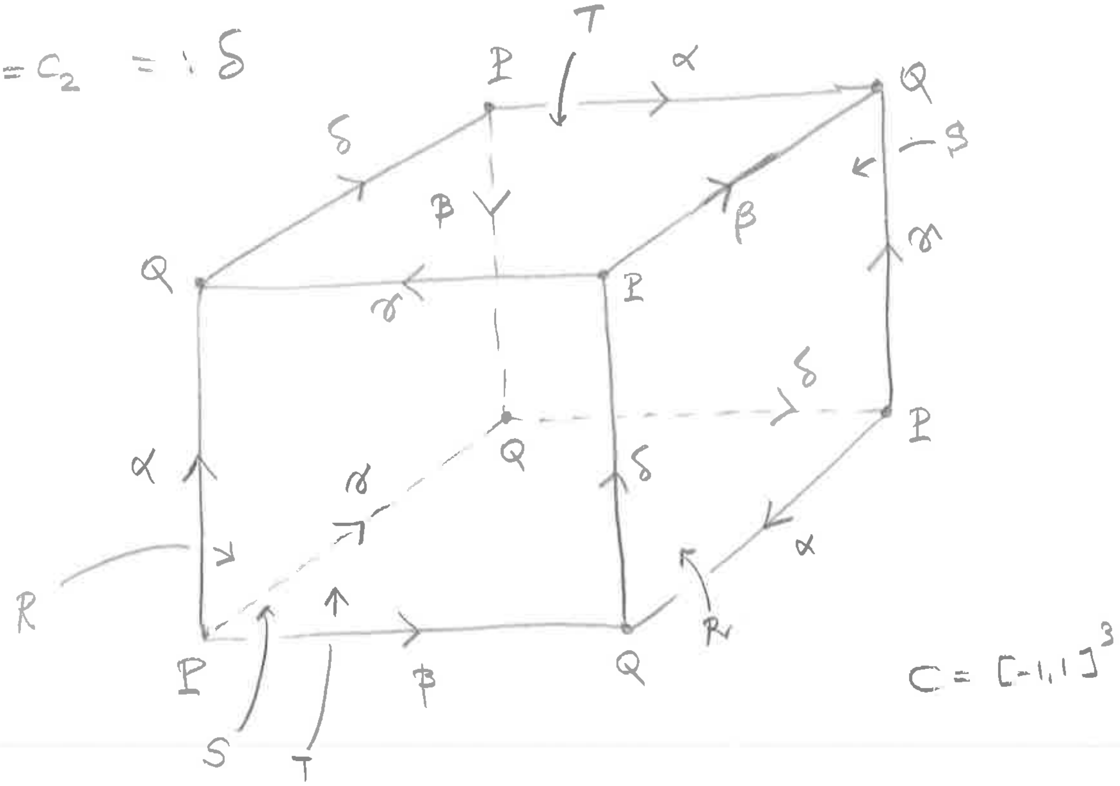
$b_4 = -a_1 \qquad c_3 = a_1 \quad =: \alpha$

$c_4 = -b_1 \qquad a_3 = b_1 \quad =: \beta$

$a_4 = -c_1 \qquad b_3 = c_1 \quad =: \gamma$

$a_2 = b_2 = c_2 \quad =: \delta$

$\Rightarrow$



$C = [-1,1]^3$

$\partial\alpha = \partial\beta = \partial\gamma = Q - P \qquad \partial\delta = P - Q$

$\partial R = \alpha + \delta + \beta - \gamma$

$\partial S = \beta + \delta + \gamma - \alpha$

$\partial T = \gamma + \delta + \alpha - \beta$

$\partial C = 0$

$\Rightarrow H_0 = \mathbb{Z}$

$$H_1 = \frac{\langle \alpha+\delta = a,\ \beta+\delta = b,\ \gamma+\delta = c\rangle}{a+b-c,\ b+c-a,\ c+a-b} = \frac{\langle a, b\rangle}{2b, 2a} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$$

$H_2 = 0 \qquad H_3 = \mathbb{Z}$

(13) Calcolare $H_*(S^3/Q_8)$ dove $S^3 = \{u \in \mathbb{H} : |u| = 1\}$
e $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. (Difficile.)

Soluzione indiretta:

Q_8 è un gruppo finito che opera in modo libero su S^3 semplicemente connessa, dunque $H_1 = Ab(Q_8)$.
Ora $\pm 1 \in Z(Q_8)$, dunque non contribuiscono a $[Q_8, Q_8]$, mentre per ogni $\alpha, \beta \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$ distinti si ha $[\alpha, \beta] = -1$, e.g.

$$[i,j] = i \cdot j \cdot i^{-1} \cdot j^{-1} = i \cdot j \cdot (-i) \cdot (-j) = k \cdot k = -1.$$

Ne segue che $Ab(Q_8) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ con

$$[\pm 1] = (0,0),\ [\pm i] = (1,0),\ [\pm j] = (0,1),\ [\pm k] = (1,1).$$

Ora S^3/Q_8 è connesso, dunque $H_0 = \mathbb{Z}$.
Dalla connessione per archi di S^3 segue anche che ogni elemento di Q_8 è omotopo all'identità come mappe $S^3 \to S^3$, dunque preserva l'orientazione, e allora S^3/Q_8 è una varietà orientabile, dunque $H_3 = \mathbb{Z}$.

Ora usiamo dualità di Poincaré e teorema dei coefficienti universali per la coomologia:

$$H^3 \overset{PD}{=} H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H^3 \overset{UCT}{=} \underbrace{(\text{parte libera di } H_3)}_{\mathbb{Z}} \oplus (\text{torsione di } H_2) \Longrightarrow \begin{pmatrix}\text{torsione} \\ \text{di } H_2\end{pmatrix} = 0$$

$$H^2 \xrightarrow{PD} H_1 = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$$

$$H^2 \xrightarrow{UCT} (\text{parte libera di } H_2) \oplus \underbrace{(\text{torsione di } H_1)}_{\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c}\text{parte libera}\\ \text{di } H_2\end{array}\right) = 0$$

dunque in conclusione $H_2 = 0$.

<u>Soluzione diretta</u> : Posto

$$S^3 = \{a+ib+jc+kd : a^2+b^2+c^2+d^2=1\}, \quad S^3_+ = \{a \geq 0\}$$

abbiamo $S^3_+ \cong D^3$ via

$$p : S^3_+ \to D^3 \qquad p(a+ib+jc+kd) = (b,c,d)$$

$$p^{-1} : D^3 \to S^3_+ \qquad p^{-1}(x,y,z) = r(x,y,z) + ix + jy + kz$$

$$r(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}.$$

E' chiaro che S^3_+ contiene un insieme di rappresentanti per l'azione di -1 su S^3, dunque resta da vedere $S^3_+ \cong D^3$ per comprendere l'azione di i,j,k su il quoziente S^3/Q_8. Ricordiamo che

$$i(a+ib+jc+kd) = -b+ia-jd+kc$$

$$j(a+ib+jc+kd) = -c+id+ja-kb$$

$$k(a+ib+jc+kd) = -d-ic+jb+ka$$

dunque su D^3 l'azione di i, j, k diventa:

$$I(x,y,z) = \begin{cases} (r(x,y,z), -z, y) & \text{se } x \leq 0 \\ (-r(x,y,z), z, -y) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$J(x,y,z) = \begin{cases} (z, r(x,y,z), -x) & \text{se } y \leq 0 \\ (-z, -r(x,y,z), x) & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$

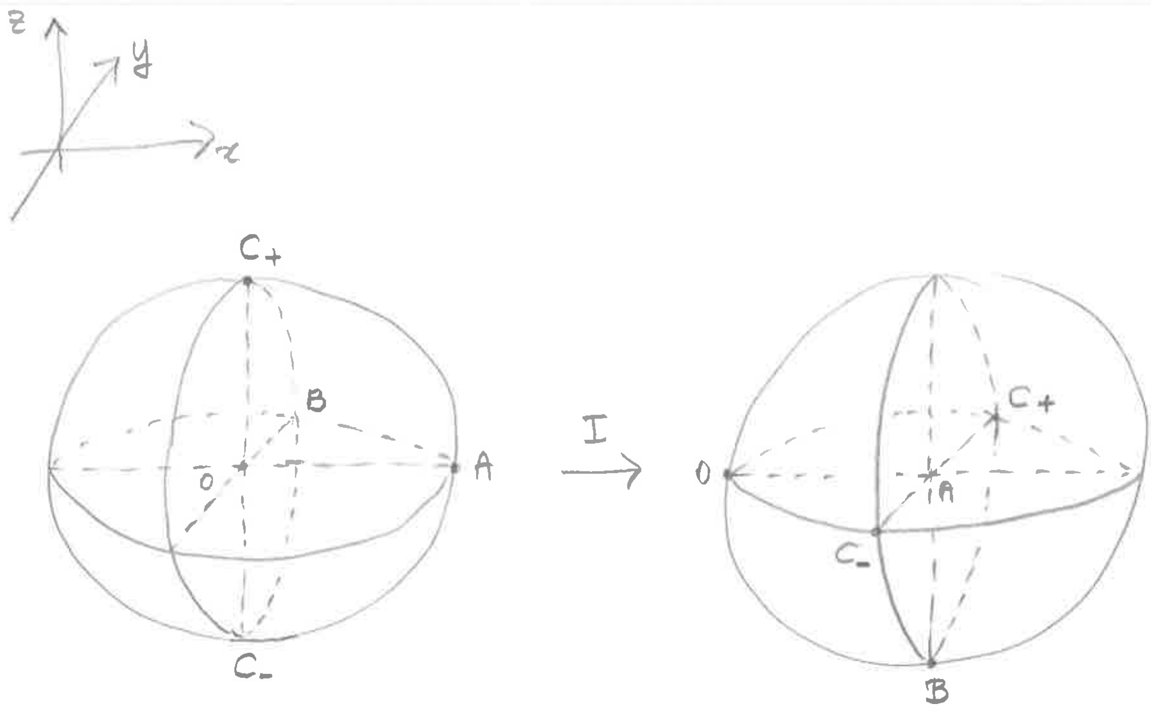
$$K(x,y,z) = \begin{cases} (-y, x, r(x,y,z)) & \text{se } z \leq 0 \\ (y, -x, -r(x,y,z)) & \text{se } z \geq 0 \end{cases}$$

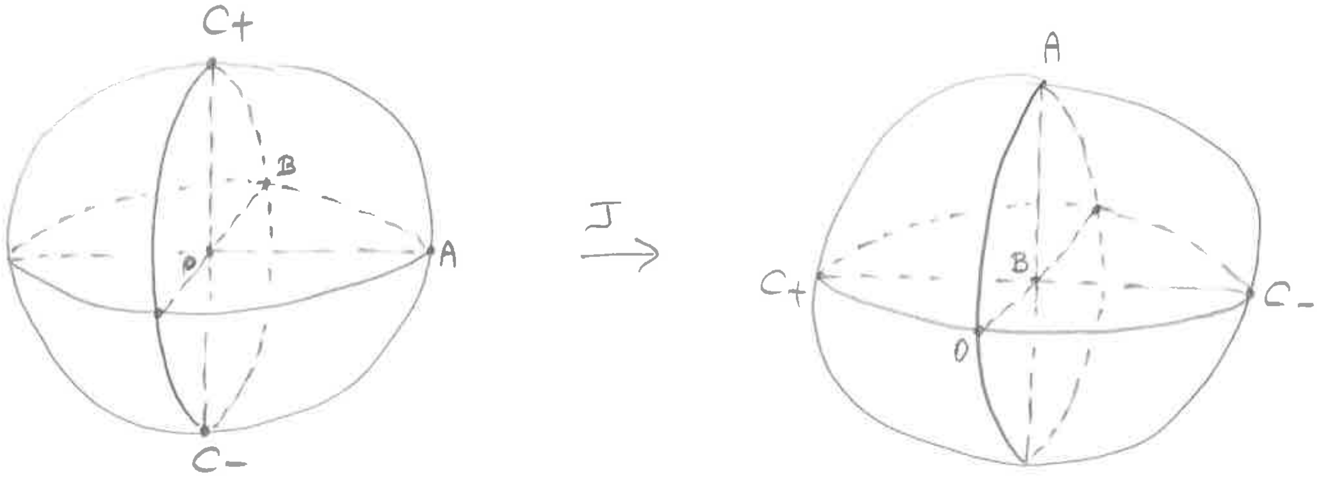
(queste veramente non sono proprio funzioni, perché ad esempio per $x=0$ ho $I(0,y,z)$ assume i due valori distinti $(\sqrt{1-y^2-z^2}, -z, y)$ e $(-\sqrt{1-y^2-z^2}, z, -y)$ che in S^3 danno $i\sqrt{1-y^2-z^2} - jz + ky$ e $-i\sqrt{1-y^2-z^2} + jz - ky$ che sono opposti fra loro, dunque equivalenti tramite $-1 \in Q_8$. In definitiva il fatto che I, J, K siano a più valori corrisponde esattamente all'azione residua di -1 su D^3 dovuta al fatto che S^3_+ è un insieme di rappresentanti sovrabbondante: su $\partial S^3_+ = \{a=0\}$ ho ancora un'azione di -1.)

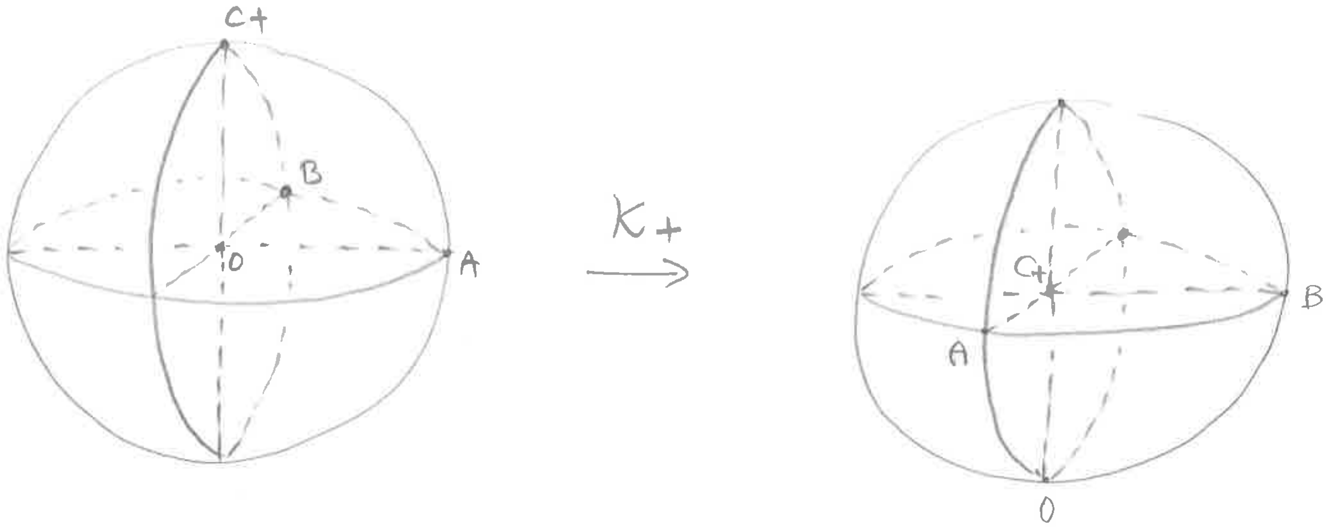
Ora in D^3 cerchiamo un insieme di rappresentanti per l'azione di I, J, K in modo che i punti interni rappresentino una sola classe, cosicché dovremo vedere solo l'azione sul bordo:

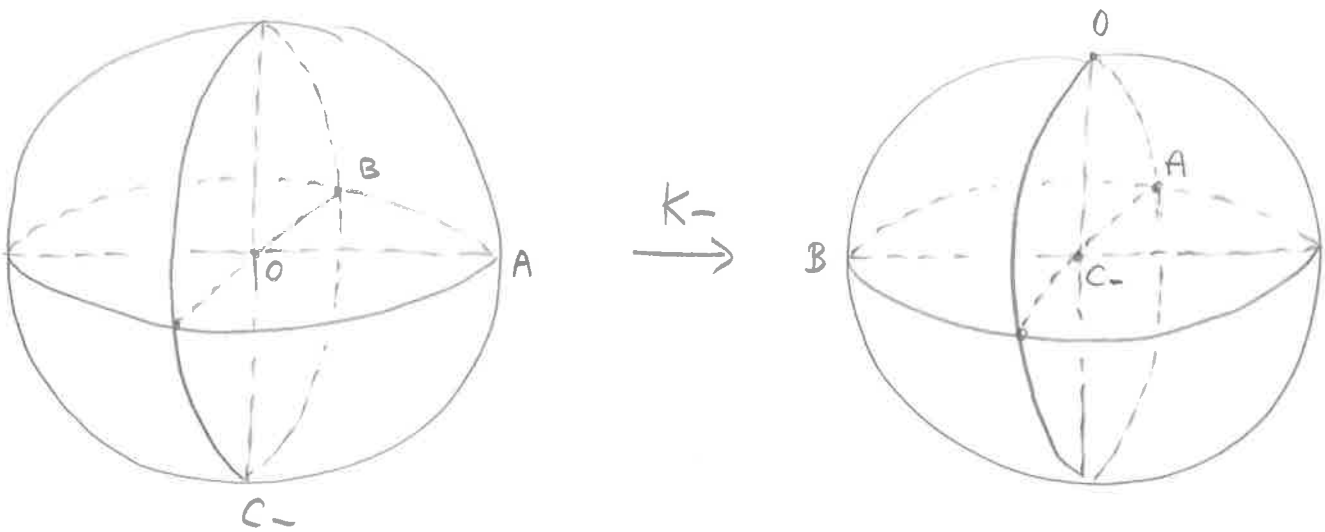
- Usando I ci riduciamo a $x \geq 0$;
- Senza perdere $x \geq 0$ mi riduco a $y \geq 0$ usando:
  - J per $z \geq 0$
  - K per $z \leq 0$.

Dunque l'insieme di rappresentanti cercato è $\{x \geq 0, y \geq 0\}$. Per capire l'azione residua sul suo bordo analizziamo separatamente I, J, K:

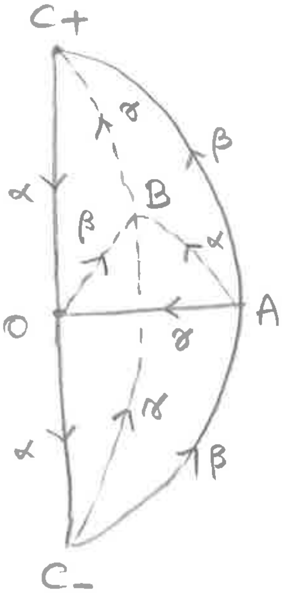








Ne segue che S^3/Q_8 ha una presentazione siffatta come complesso cellulare:



$P = O = A = B = C_+ = C_-$

$\alpha = AB = C_+O = OC_-$

$\beta = AC_+ = OB = C_-A$

$\gamma = AO = BC_+ = C_-B$

$R = AC_+B = OBC_-$

$S = ABC_- = C_+OA$

$T = C_+BO = OAC_-$

$U = \text{tutto}$

$\partial_1 \alpha = \partial_1 \beta = \partial_1 \gamma = 0$

$\partial_2 R = \beta - \gamma - \alpha \qquad \partial_2 S = \alpha - \gamma + \beta \qquad \partial_2 T = -\gamma - \beta - \alpha$

$\partial_3 U = 0$

$H_0 = \mathbb{Z}$

$$H_1 = \frac{\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle}{\begin{array}{l} \beta = \alpha + \gamma \\ 2\alpha = 0 \\ 2(\alpha + \gamma) = 0 \end{array}} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$$

$H_2 = 0$

$H_3 = \mathbb{Z}.$