ETA 30/10/14

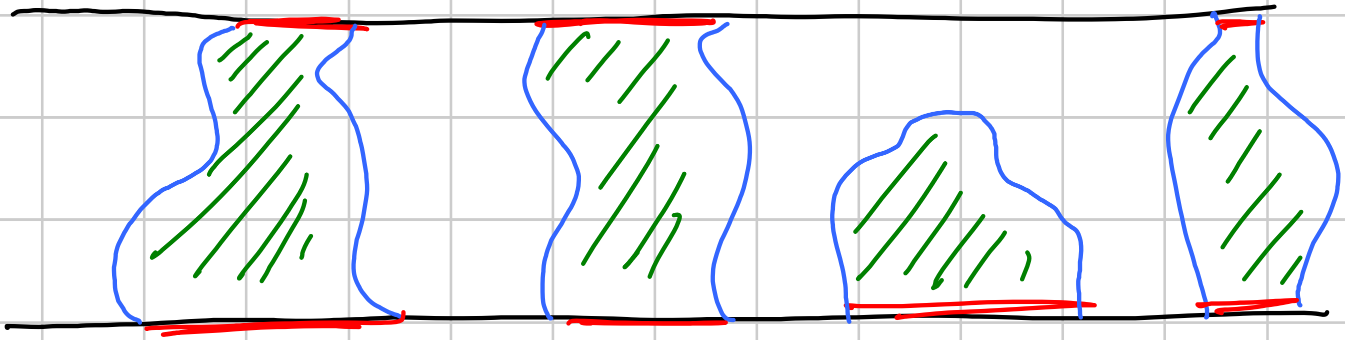
J-S DIFF: $\alpha : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ DIFF

$\pi_{y^\perp} \circ \alpha : S^1 \to \mathbb{R}$ ha come punti critici solo max e min ad altezze diverse.

Scelgo $-\infty < h_0 < h_1 < \dots < h_v < +\infty$ t.c. ogni $[h_{j-1}, h_j]$ contiene solo un max o un min;

definisco I_j come nel caso PL e provo che I_j bordo una unione di dischi bucati.

Passo ricorsivo:



ho tra le due rette archi monotoni verso l'alto tranne uno che ha max o min: devo provare che insieme ai segmenti bordano U dischi. $\boxtimes$

<u>Teo</u>: $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ per $n<m$

<u>Dim</u>: p.a.

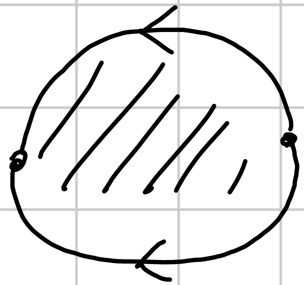
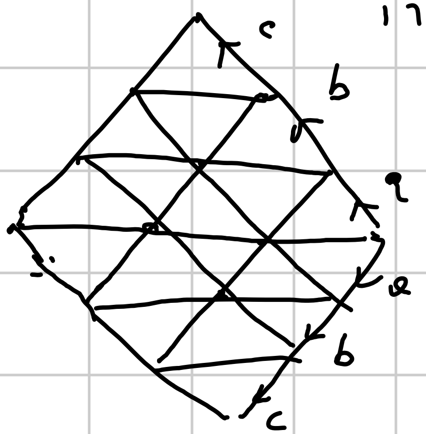
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \setminus \{pt\} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, phantom, "\wr\!\!S"] & \mathbb{R}^m \setminus \{pt\} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
\partial \Delta_n = S^{n-1} \arrow[d] & S^{m-1} = \partial \Delta_m \arrow[d] \\
0 = H_{m-1} & = \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

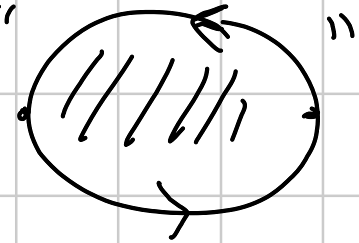
Classificazione delle superfici PL

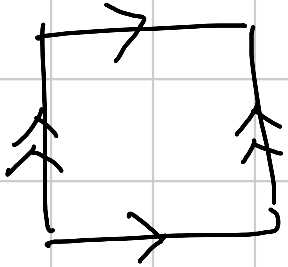
(Fatto: Hauptvermutung: $n=2$ PL = TOP.)

Oggetti base:

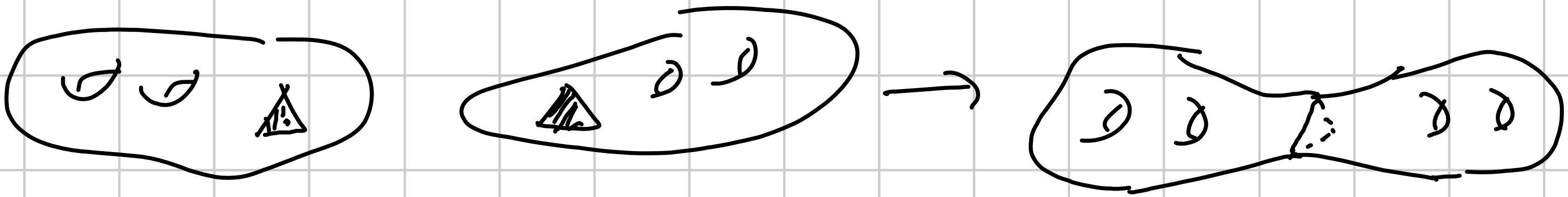
$S^2 = \partial \Delta_3 =$  $=$ 

da pensare immerso in qualche $\mathbb{R}^N$.
(si può sempre fare).

$\mathbb{P}^2 =$ "  "

$T =$ 

<u>Def</u>: se Σ_1 e Σ_2 sono superfici PL chiamo $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ (somma connessa) la superficie $(\Sigma_1 \setminus \mathrm{int}(\Delta_1)) \cup_f (\Sigma_2 \setminus \mathrm{int}(\Delta_2))$ dove $\Delta_j \in \Sigma_j^{[2]}$ e $f : \partial \Delta_1 \to \partial \Delta_2$ è omeo PL.



(tacitamente: tutte le superfici connesse)

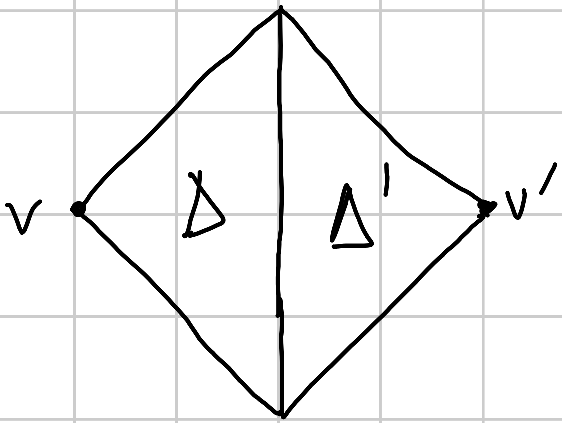
Fatto: è ben definita / omeo PL:

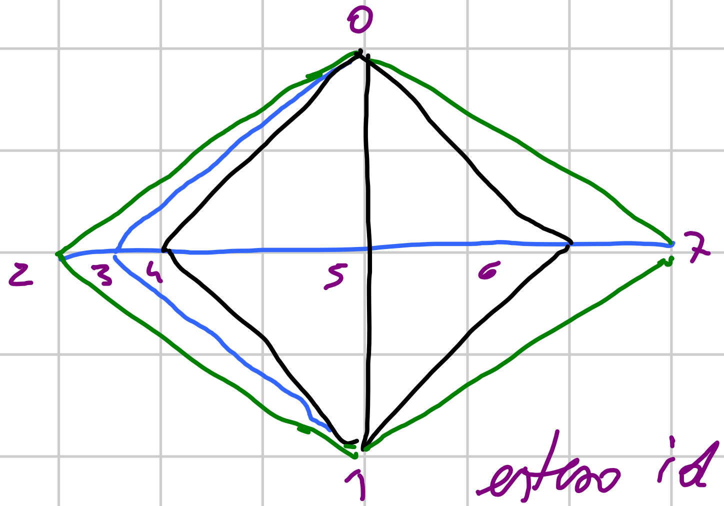
1. Se $\Delta, \Delta' \in \Sigma^{[2]}$ esiste $h : \Sigma \to \Sigma$, omeo PL t.c. $h(\Delta) = \Delta'$

   ($\Longrightarrow$ scelta di Δ_1 e Δ_2 irrilevante)

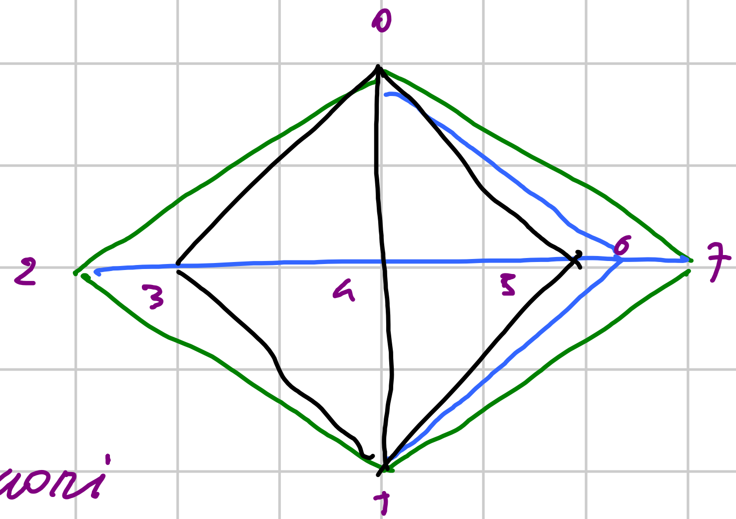
Idea di 1: basta vederlo per Δ, Δ' che hanno lato in comune:

triangolo in due modi diversi
le zone intorno a $\Delta \cup \Delta'$:
(supponendo che da v e v'
esca un solo altro lato: si
no ...)





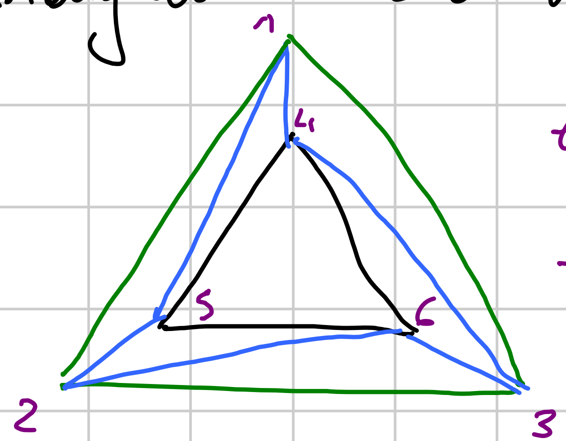
esteso di fuori



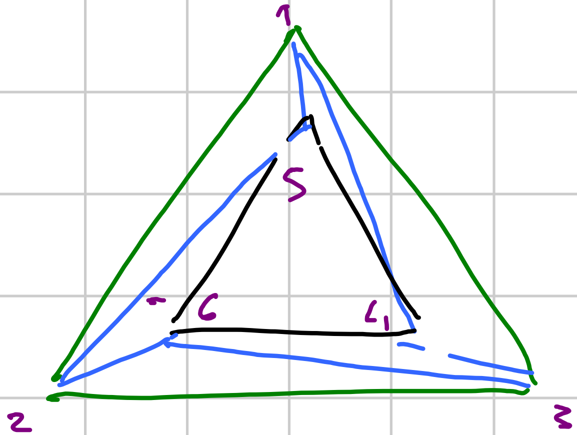
2. Se $\Delta \in \Sigma^{[2]}$ e $h : \partial\Delta \to \partial\Delta$ preserva una orientazione allora h si estende a un omeo PL di Σ.

($\Rightarrow \Sigma_1 \# \Sigma_2$ dipende al più da f / automorf. pos.)

Triangolo in due modi un intorno di Δ:



estrao pol fuori

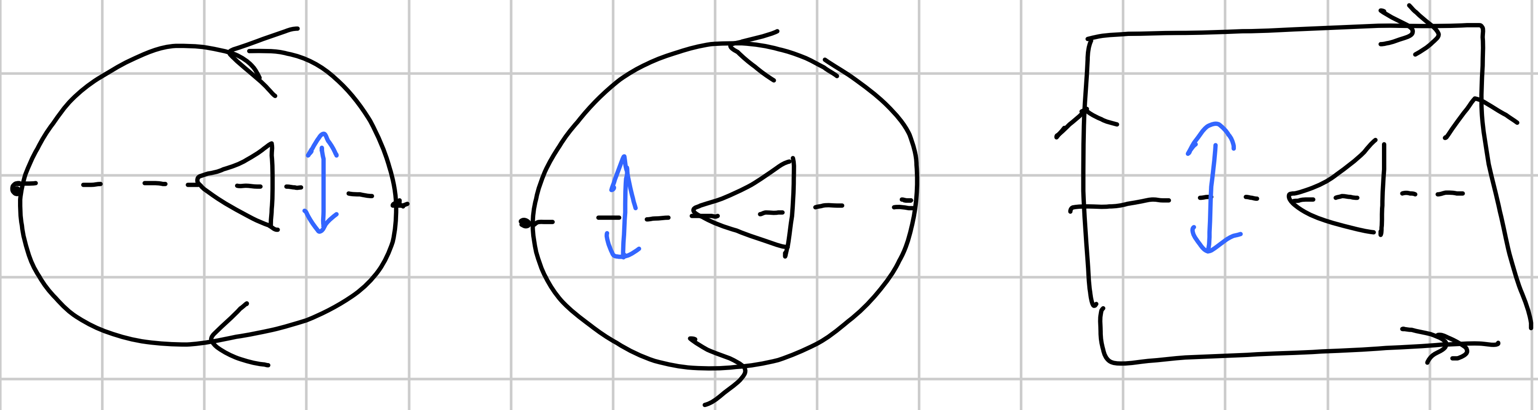


3. Se Σ è S^2, $\mathbb{P}^2$, T e $\Delta \in \Sigma^{[2]}$

allora esiste $f : \Sigma \to \Sigma$ omeo t.c.

con $f(\Delta) = \Delta$ e inverte una orientaz. di Δ

($\Rightarrow \Sigma_1 \# \Sigma_2$ è ben def. se Σ_1 o Σ_2 sono S^2 o $\mathbb{P}^2$ o T)



4. Vedremo durante la classificazione che ogni

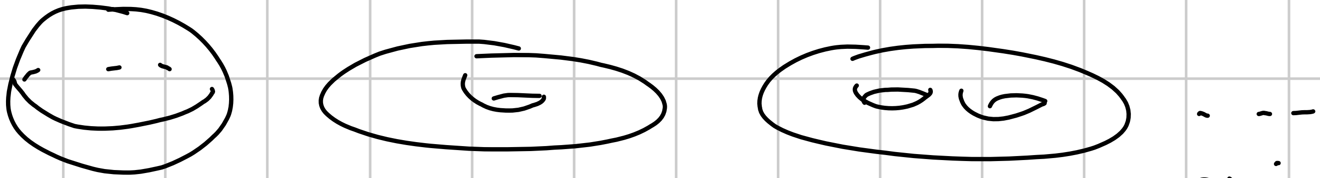
Σ è S^2 o $\underbrace{T \# \cdots \# T}_{g} =: g \cdot T$

o $\underbrace{\mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2}_{k} =: k \cdot \mathbb{P}^2$

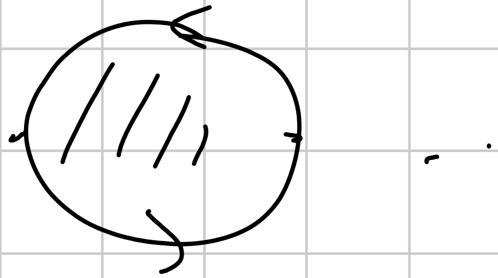
$\Longrightarrow \Sigma_1 \# \Sigma_2$ sempre ben definito.

<u>Teo</u>: Σ superficie PL chiusa (cpt senza ∂) è PL omeo a una e una sola di:

S^2, $g \cdot T$ $(g \geq 1)$, $k \cdot \mathbb{P}^2$ $(k \geq 1)$.



orientabili

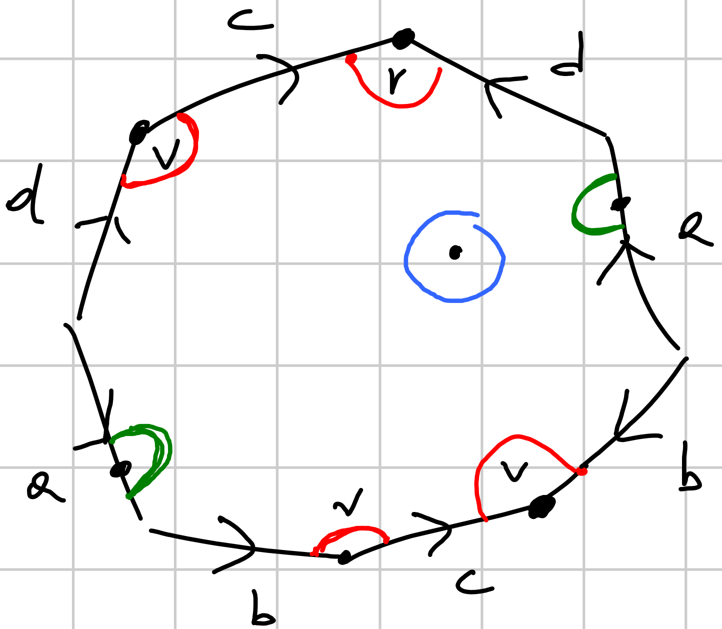


non orientabili

(vedremo che $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \cong$ Klein) _

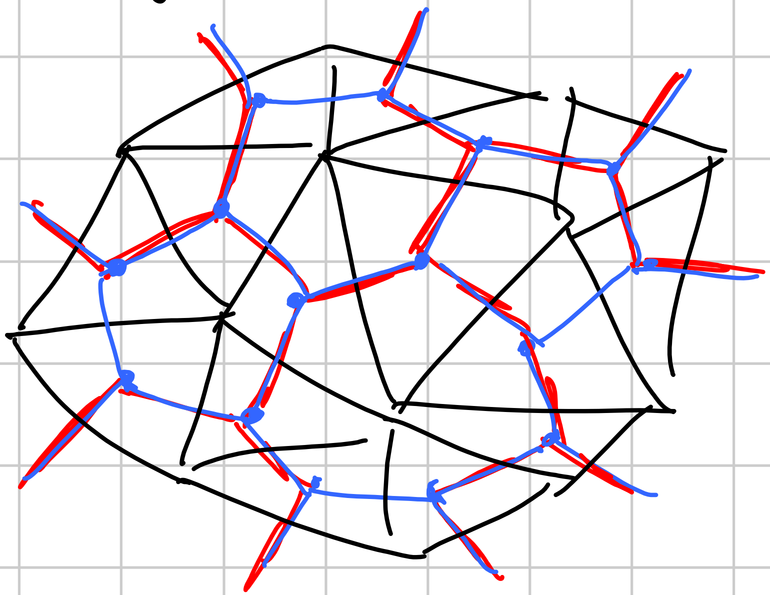
__Dim.__ Noto che se ho un $2k$-poligono in $\mathbb{R}^2$

($k=1$: lati curvi che posso pensare dritti se suddivisi) e un incollamento simpliciale dei suoi lati a coppie ottengo una superficie:



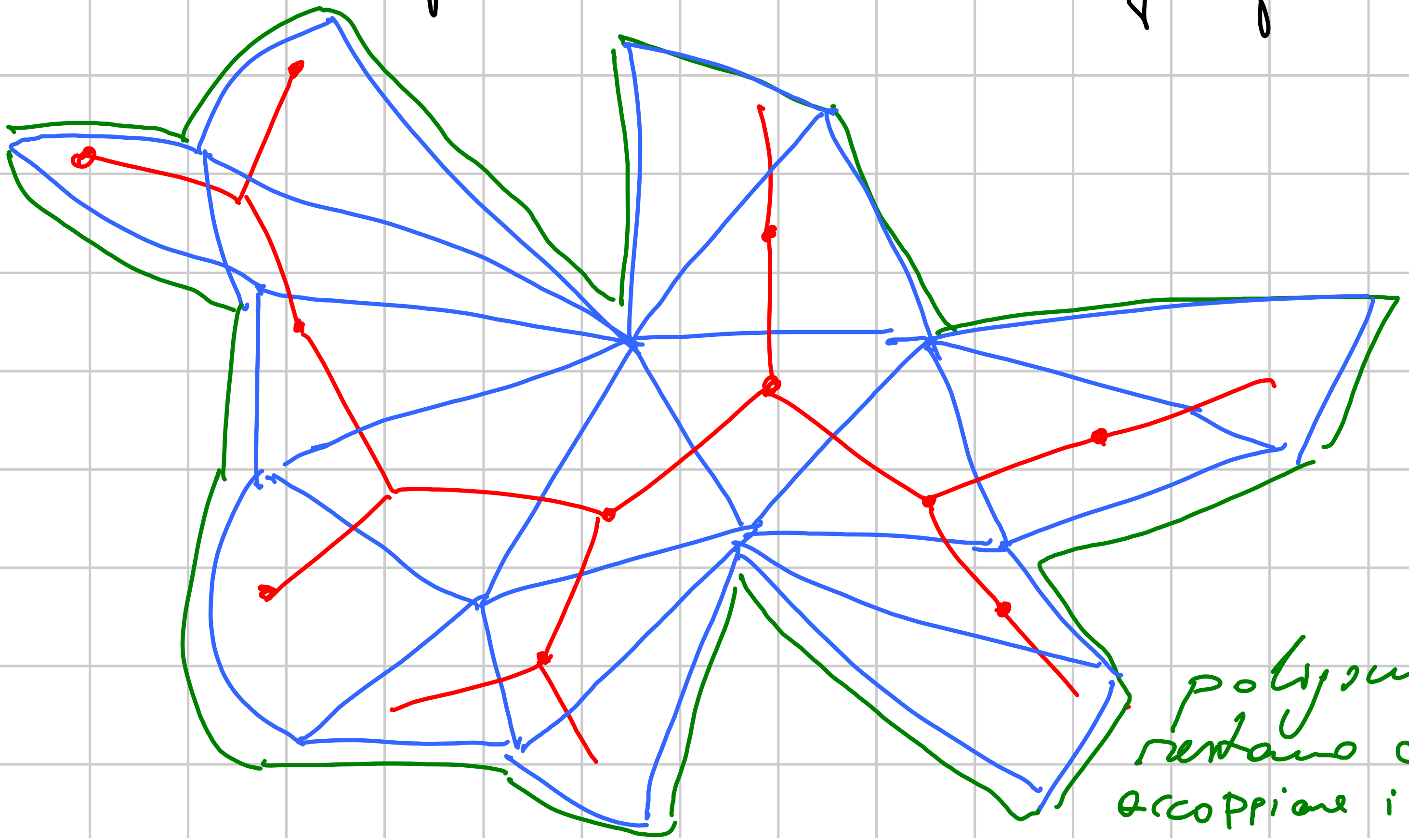
- suddividendo: è un complesso simpliciale
- link punto interno è S^1
- link punto su un lato ma non vertice è S^1
- link vertice è S^1.

Viceversa: ogni Σ chiusa (convessa) emerge così:
Prendo il grafo duale a una triangolaz. di Σ:



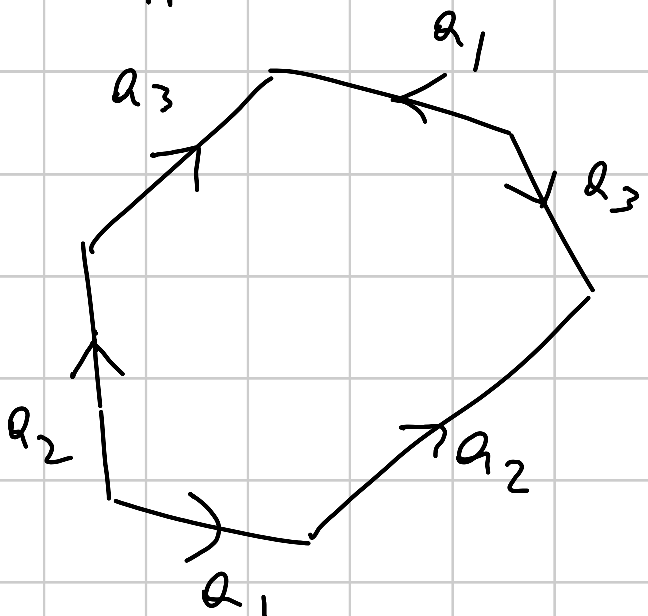
Dentro tale grafo prendo un albero massimale
e lo realizzo in $\mathbb{R}^2$: inoltre realizzo

in $\mathbb{R}^2$ tutti gli incollamenti tra triangoli che corrispondono ai lati del grafo :



poligono !
restano da
accoppiare i lati

$2k$-poligono con lati accoppiati $\longleftrightarrow$ parola con k lettere $a_j^{\pm}$ ognuna che compare due volte / riordino ciclico

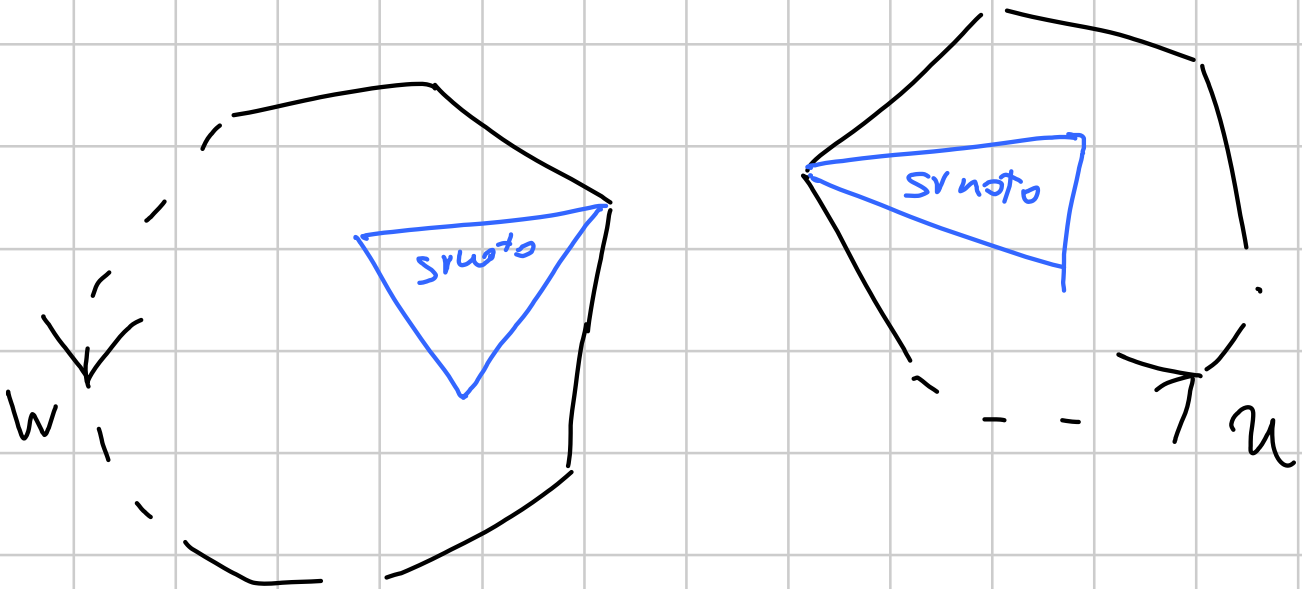


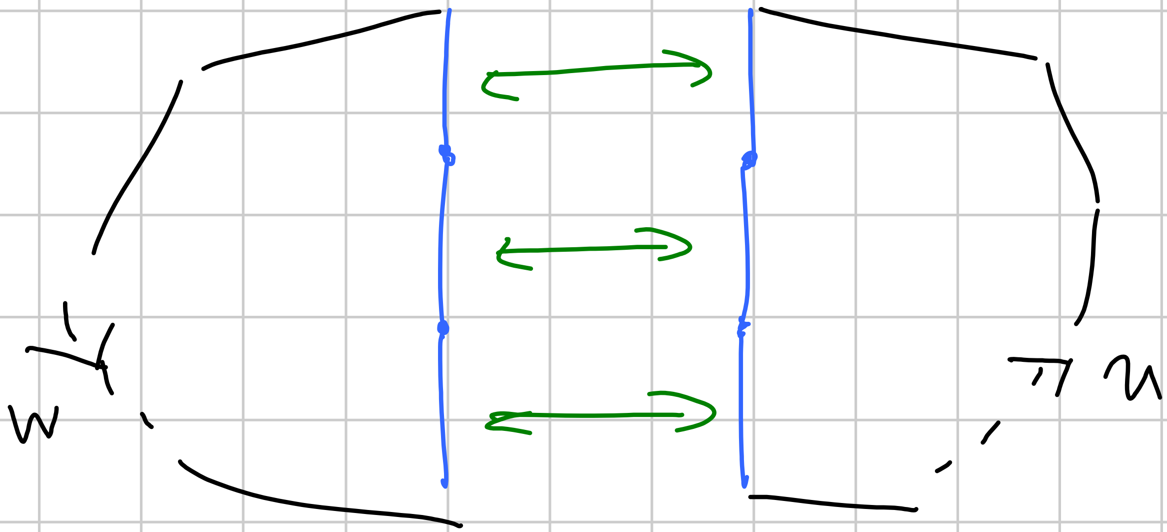
$$\longleftrightarrow \quad a_1 \cdot a_2 \cdot a_3^{-1} \cdot a_1 \cdot a_3^{-1} \cdot a_2^{-1}$$
$$= a_3^{-1} \cdot a_1 \cdot a_3^{-1} \cdot a_2^{-1} \cdot a_1 \cdot a_2$$

Dunque ogni tale parola dà una superficie e tutte

Le superfici emergono così. Inoltre:

$w \# u = w \cdot u$:





$\rightsquigarrow w \cdot u$

Quindi: $S^2 \cong a \cdot a^{-1}$

$g \cdot T = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$

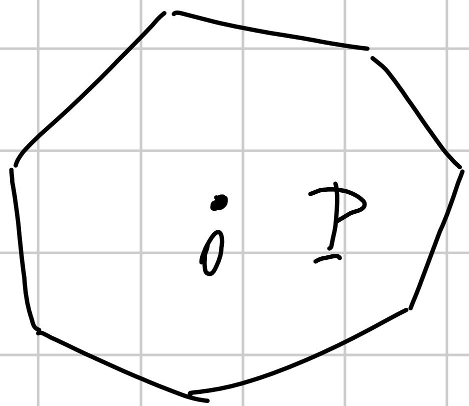
$$k \cdot T = a_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_k$$

Per concludere:

•) esse non sono omeo tra loro

••) ogni parola è omeo a una di loro

•)



$$U = P \setminus \{o\} \big/ _{\text{identif}} \simeq \partial P \big/ _{\text{identif}}$$

$\simeq$ bouquet di

2g circonf per $g \cdot T$

k circonf per $k \cdot \mathbb{P}^2$

$$V = P \setminus \partial P \simeq \{pt\}$$

$$U \cap V \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(g \cdot T) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_g, b_g] \rangle$$

corona circolare aperta

$$\pi_1(k \cdot \mathbb{P}^2) = \langle a_1, \ldots, a_k \mid a_1^2 \cdots a_k^2 \rangle$$

$$\Rightarrow H_1(g \cdot T) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$$

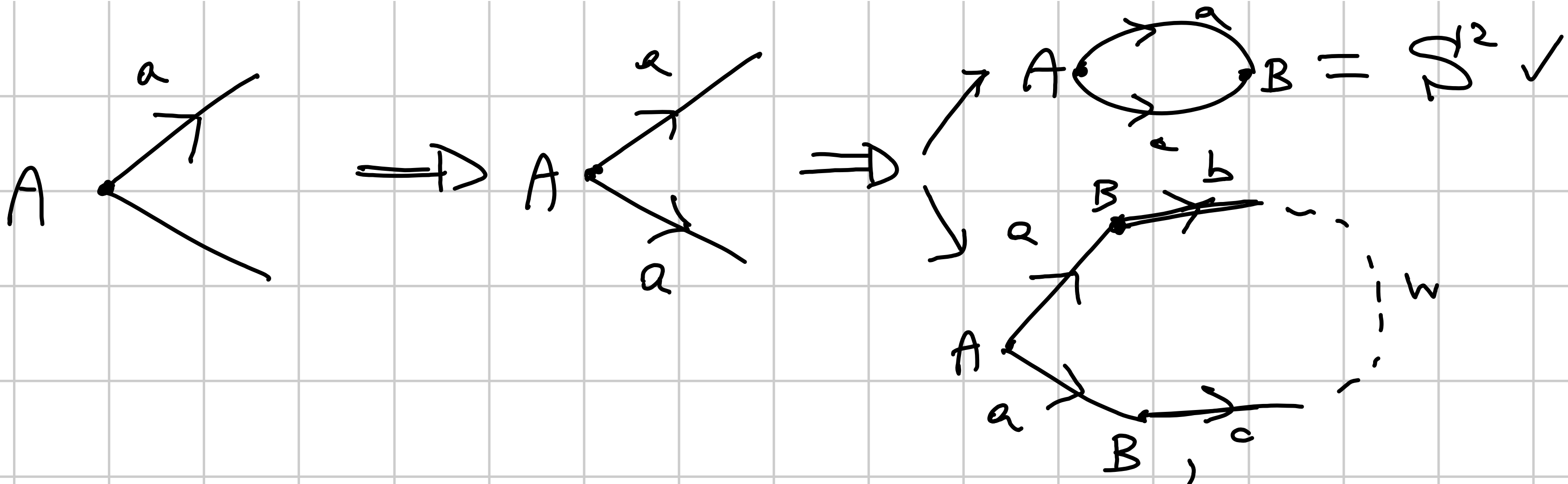
$$H_1(k \cdot T) \simeq \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/_2$$

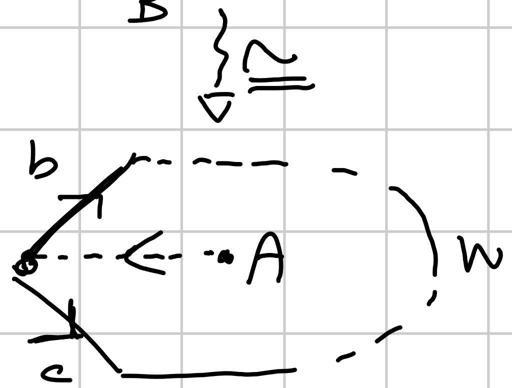
non isomorfi fra loro

••) Richiede quattro passi + conclusione.

I. Posso supporre che tutti i vertici del poligono P siano identificati fra loro a meno di omeo PL della superficie.

Supponiamo che ci siano almeno due vertici dopo le identificazioni. Se uno compare una volta sola su ∂P :

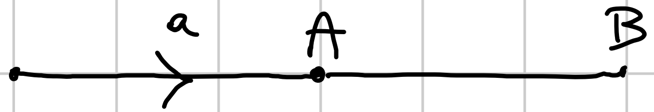




indutivamente concluído_

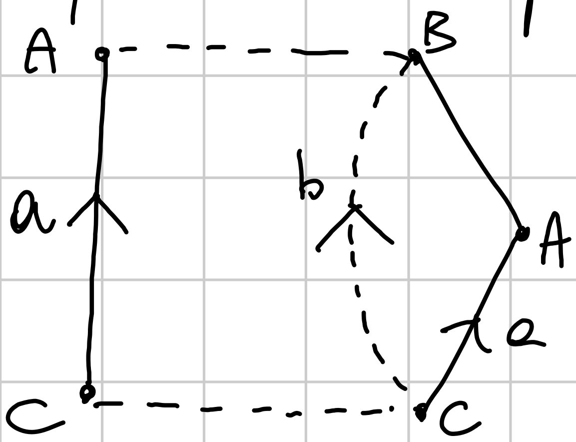
Se invece tutti compaiono almeno due volte scelgo un lato che abbia estremi distinti A, B.

Considero



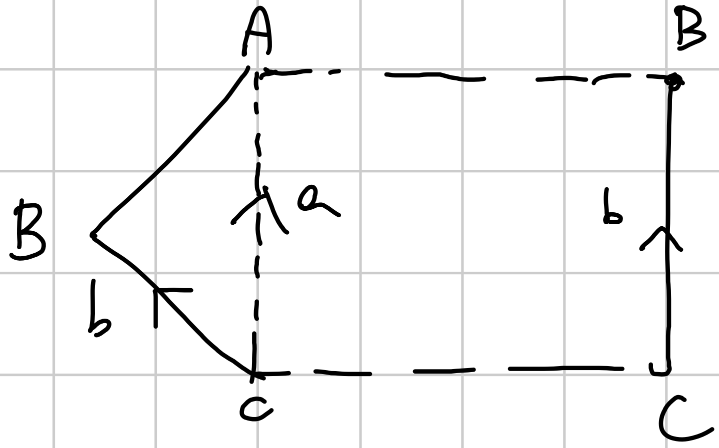
noto che $AB \neq a^{-1}$ (altrimenti A compare una sola volta e anche $AB \neq a$ perché altrimenti $B = A$.

Dunque $a^{\pm 1}$ compare altrove su ∂P:



taglio lungo b e incollo lungo a

(funzione uguale se ho $a \ldots a \ldots$)

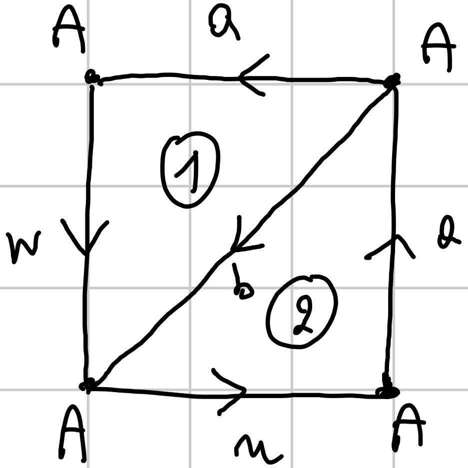


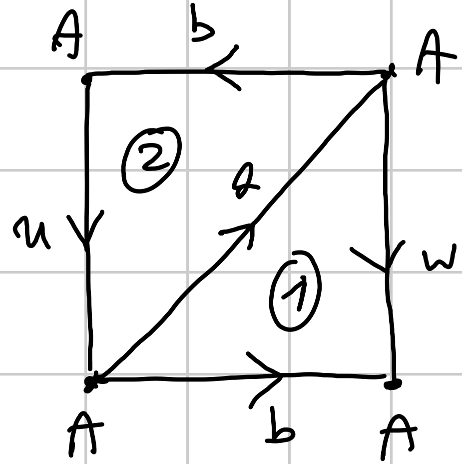
il numero di occorrenze di A sul ∂ è calato di 1

Ricorsivamente concludo

II. $aawu \cong aw^{-1}au$

senza spostare le I

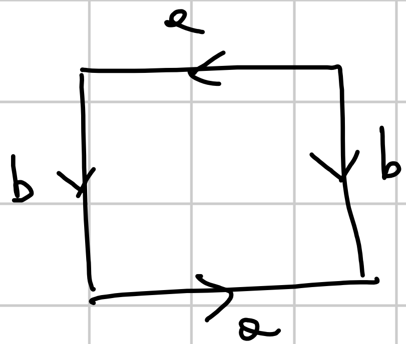




$= b w^{-1} b u$

<u>Oss</u>: $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \cong \text{Klein}$

$aa\,bb \cong ab^{-1}ab$

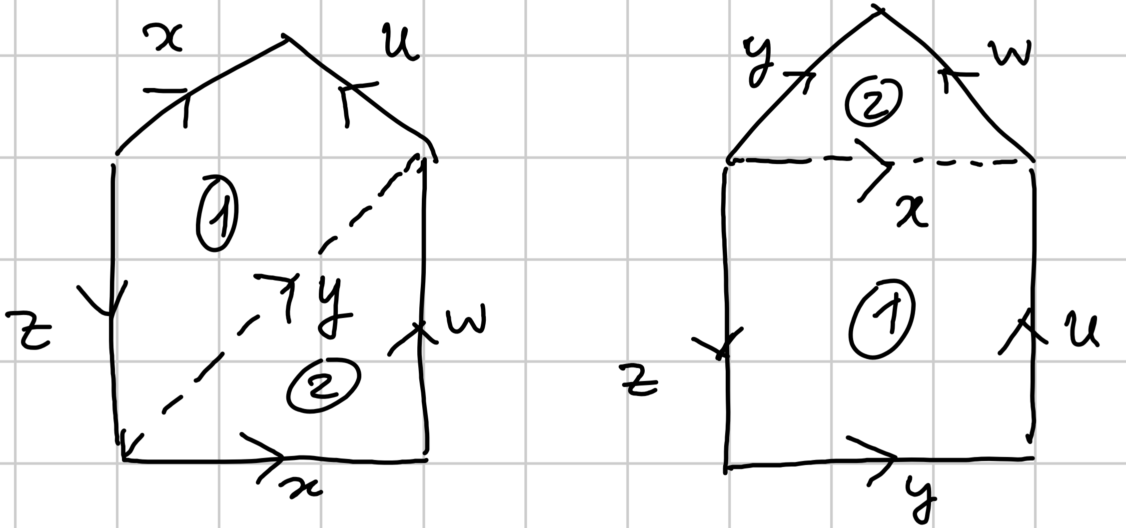


$T \# \mathbb{P}^2 \cong (\text{Klein}) \# \mathbb{P}^2 \left(\cong 3 \cdot \mathbb{P}^2\right)$

$$T \# \mathbb{P}^2 = ab\underbrace{a^{-1}b^{-1}}_{\mathrm{II}^{-1}}cc = ab\underbrace{c}_{\mathrm{II}}bac$$

$$= abbc^{-1}ac = \underbrace{bb}_{\mathbb{P}^2}\underbrace{c^{-1}aca}_{\text{Klein}}$$

III. $xwux^{-1}z \cong xuwx^{-1}z$ (senza rovinare I)



$= yuwy^{-1}z$

IV. $xwyux^{-1}vy^{-1}z \cong \underbrace{xyx^{-1}y^{-1}}_{\text{toro unito}}t$

toro sparso

$\left(\text{II.} \quad awau \cong \underbrace{aa}_{\mathbb{P}^2 \text{ unito}}w^{-1}u \right)$

$\mathbb{P}^2$ sparso

$$x \cdot (w)(y \cdot u) \cdot x^{-1} \cdot v \cdot y^{-1} \cdot z$$

$$\cong x\, y\, (u\, w)(x^{-1} v)\, y^{-1} z \cong \underbrace{x}\, y\, x^{-1} v\, u\, w\, y^{-1} z$$

$$\cong y\, x^{-1} (v\, u\, w)(y^{-1} z)\, x \cong y\, x^{-1} y^{-1} z\, v\, u\, w\, \underbrace{x}$$

$$\cong x\, y\, x^{-1} y^{-1} z\, v\, u\, w$$ _

<u>Conclusione</u>: usando II e IV tutti i $\mathbb{P}^2$ spazi e i T spazi li metto uniti. Se così esaurisco la parola

trovo che la sup è

$$k \cdot \mathbb{P}^2 \# n \cdot T$$

ma se $k, n > 0$ è $(k+2n) \cdot \mathbb{P}^2$ _

(conclusione: prossima volta) _

Enunciato alternativo: le superfici sono

S^2, $g \cdot T$, $p \cdot K$, $p \cdot K \# \mathbb{P}^2$ _