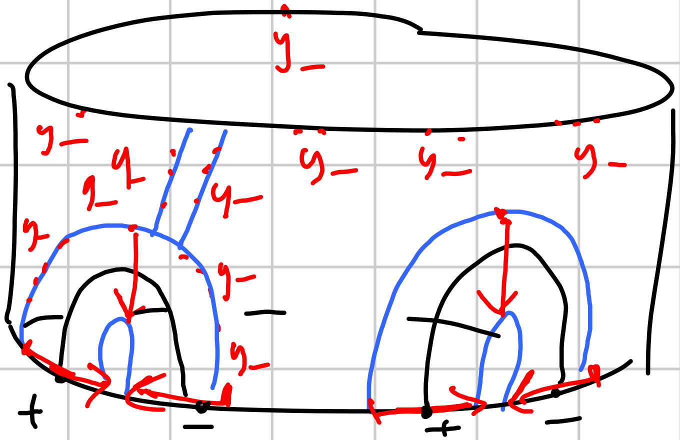
ETA 28/10/14

<u>Teo</u>: $\{f : S^1 \circlearrowleft\}/_{\simeq} \xleftrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$

Resta: $\deg(f) = 0 \Longrightarrow f \simeq \text{cost}.$



$\boxtimes$

Dimostrazione via grado di

1) Teo fond. algebra

$p(z) \in \mathbb{C}[z]$ non costante ; basta vedere che come mappa $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è surgettiva.

$\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = S^2$. Inoltre $p(z)$ definisce $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ponendo $p(\infty) = \infty$.

Analizzo p vicino a $\infty \longmapsto \infty$ cioè

$$z \longmapsto \frac{1}{p(1/z)}$$ vicino a 0

wlog $p(z)$ monico :

$$z \mapsto \frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)^d + a_1\left(\frac{1}{z}\right)^{d-1} + \dots + a_d} = \frac{z^d}{1 + a_1 z + \dots + a_d z^d}$$

$$= \left(\frac{z}{r(z)}\right)^d \qquad r(0) = 1$$

$\Rightarrow \dfrac{z}{r(z)} =: u$ è un cambio di variabile

$\Rightarrow$ quindi nella carta ho $u \longmapsto u^d$

la quale ha grado d $\Rightarrow$ deg. $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \circlearrowleft$

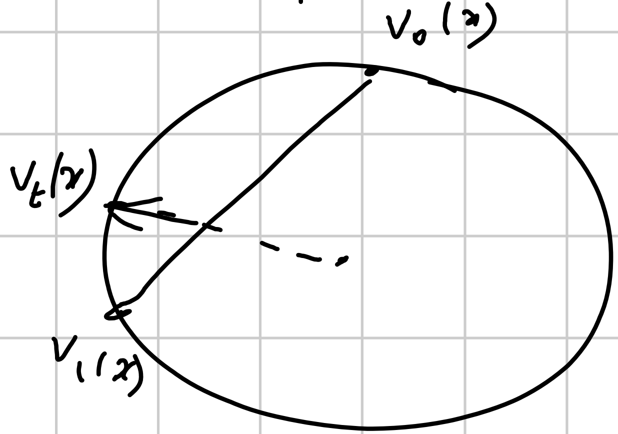
è d $\Rightarrow$ è surgettiva $\square$

Teo (hairy ball): se n è pari non esistono campi di vettori tangenti mai nulli a S^n in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dim: 1) $v_0, v_1 : X \to S^n$ mai antipodali

$$\Longrightarrow v_0 \simeq v_1 .$$

$$F(t,x) = \frac{(1-t)v_0(x) + t \cdot v_1(x)}{\| \quad '' \quad \|}$$



2) Se S^n è pettinata da v ho che $v/\|v\| : S^n \circlearrowleft$ con $\frac{v}{\|v\|} \perp v$ ovunque $\Rightarrow$ $v(x)$ non è mai x nè $-x$

$\Rightarrow \mathrm{id}_{S^n} \simeq -\mathrm{id}_{S^n}$.

Invece $\deg(\mathrm{id}_{S^n}) = 1$, $\deg(-\mathrm{id}_{S^n}) = (-1)^{n+1}$;

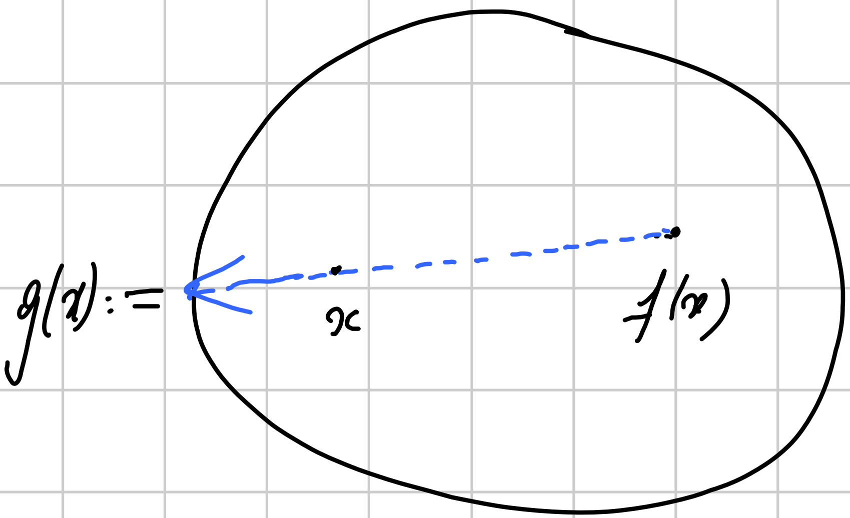
in $T_{e_0}S^n$

$$\underbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{punta fuori}}}{e_0}, \underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{base pos. di } T_{e_0}S^n}}_{\text{base pos. di } \mathbb{R}^{n+1}} \xmapsto{-\mathrm{id}_{S^n}} \underbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{punta fuori}}}{-e_0}, \underbrace{-e_1, \dots, -e_n}_{\substack{\text{pos. se } (-1)^{n+1} = 1 \\ \text{neg altrimenti}}}}_{\text{ha segno } (-1)^{n+1}}$$

$\blacksquare$

Teo (Brouwer): $f: D^n \to D^n$ continua ha pti fissi.

Se no:



$g: D^n \to S^{n-1}$ continua

$g|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1}\times[0,1] \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d] & S^{n-1} \\
S^{n-1}\times[0,1]/S^{n-1}\times\{0\} = D^n \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

h omotopia tra $id_{S^{n-1}}$ e una costante

$\deg = 1$ $\qquad$ $\deg = 0$. $\square$

Immersioni $\alpha : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (C^∞ con α' mai nullo) modulo omotopia regolare (omotopia tramite immersioni; $\alpha_0 \simeq_{reg} \alpha_1$ se esiste $A : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$

t.c. $A(\cdot, j) = \alpha_j \quad j = 0,1$

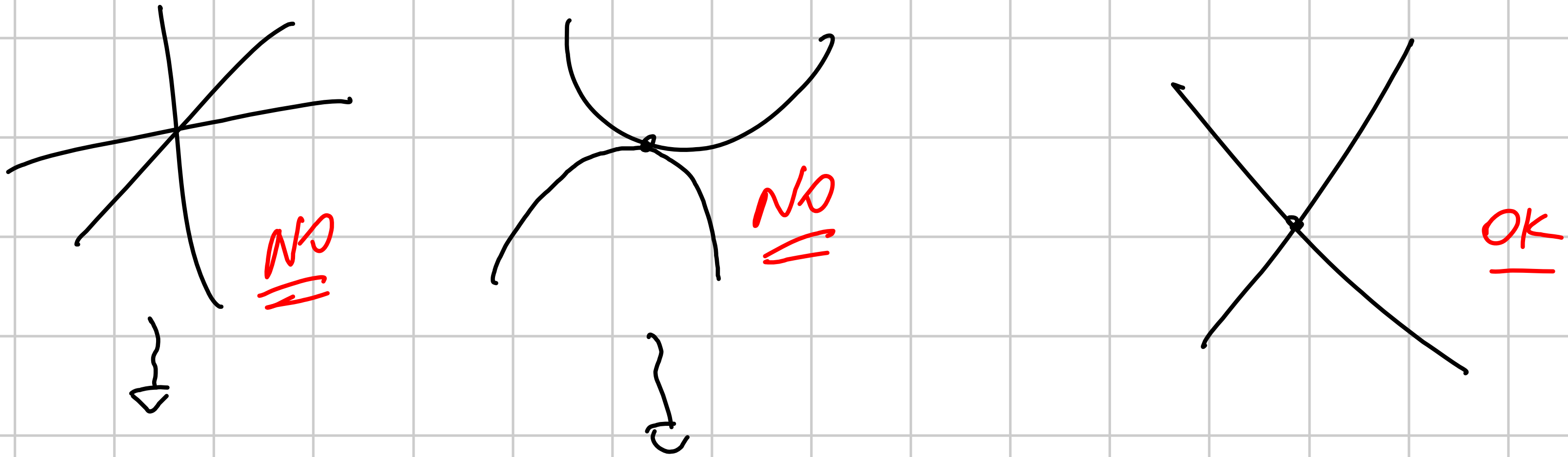
$A(\cdot, t)$ immersione $\forall t$ _

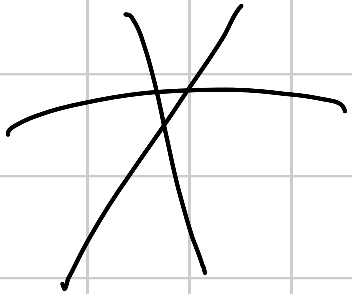
Def: writhe $\quad w(\alpha) = \deg\left(\dfrac{\alpha'}{\|\alpha'\|} : S^1 \to S^1\right)$

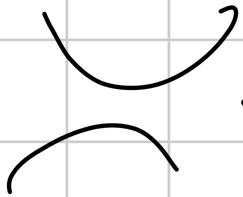
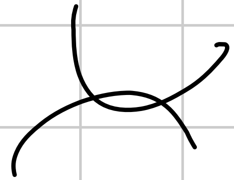
(ben def. a meno di $\simeq_{reg}$) _

Teo: $\text{immersioni } S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \big/ \simeq_{reg} \xleftrightarrow{w} \mathbb{Z}$

Dim: Immagine di una $\alpha: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ generica ha solo punti doppi che sono incroci

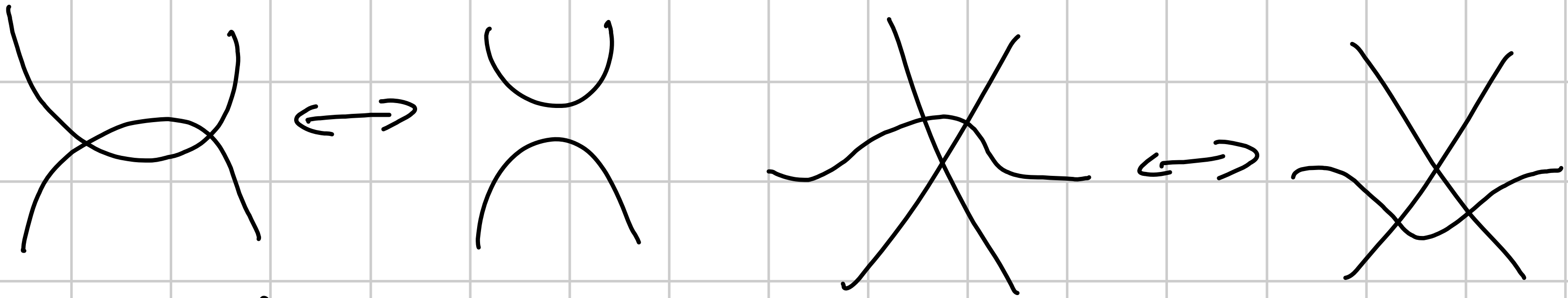




 o 

di una α generica

L'immagine orientata determina α a meno di $\simeq_{rep}$; ogni inversione è $\simeq_{rep}$ a una generica.
Inoltre le seguenti mosse sulle immagini sono generate da $\simeq_{rep}$:

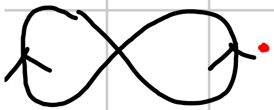


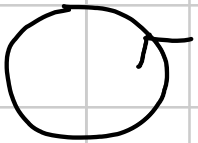
(analoghe a Reidemeister II / III :

analogo della I :

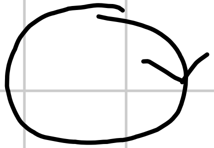
non è generato da $\simeq_{reg}$).

I. Tutti gli $n \in \mathbb{Z}$ sono $w(\alpha)$ per qualche α:

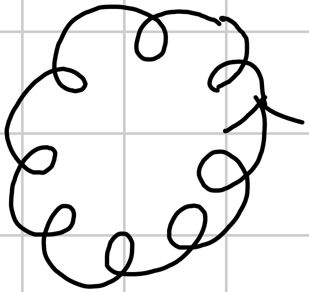




1

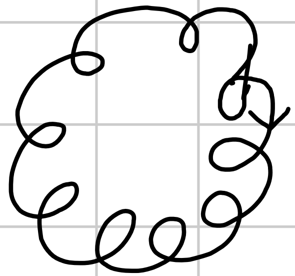


-1

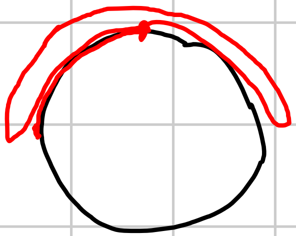


$n \geq 2$

$((n-1) \times \alpha)$

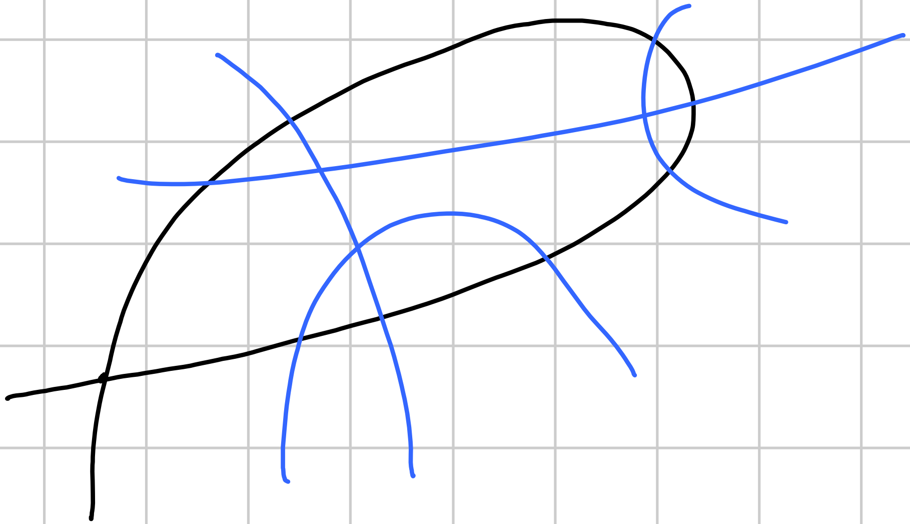


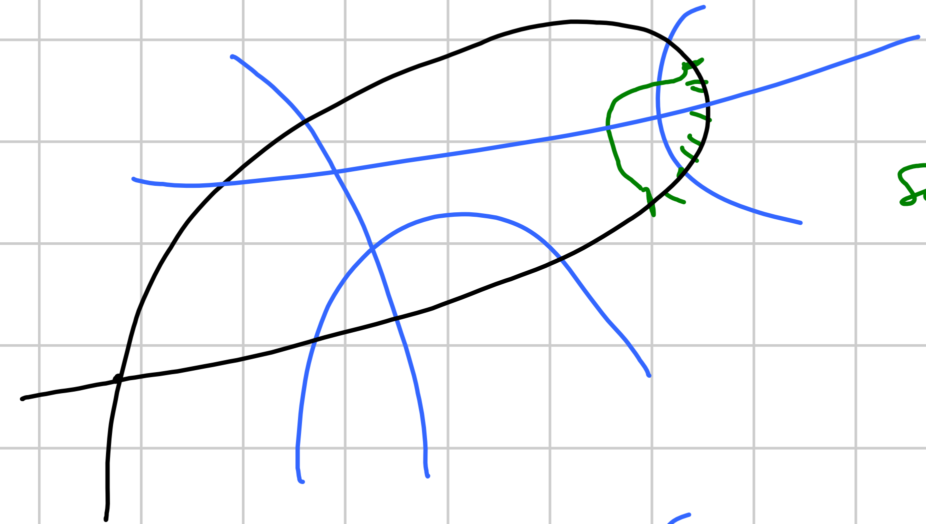
$n \leq -2$



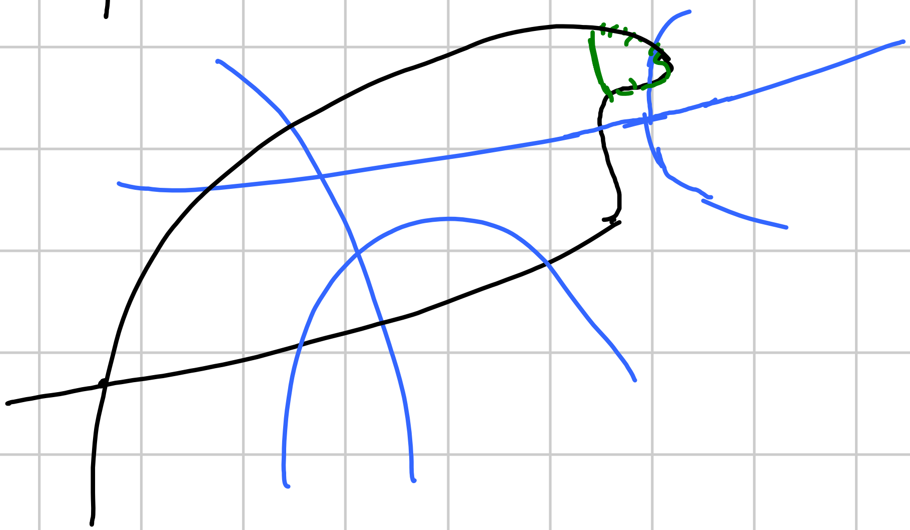
II. Provo che tramite $\simeq_{rep}$ posso ricondurmi a uno di questi modelli.

II.a Sia $[t_0,t_1] \subset S^1$ t.c. $\alpha(t_0)=\alpha(t_1)$ ma $\alpha|_{[t_0,t_1]}$ è semplice; allora via $\simeq_{rep}$ posso supporre che $\alpha|_{[t_0,t_1]}$ non contiene alcun punto doppio:



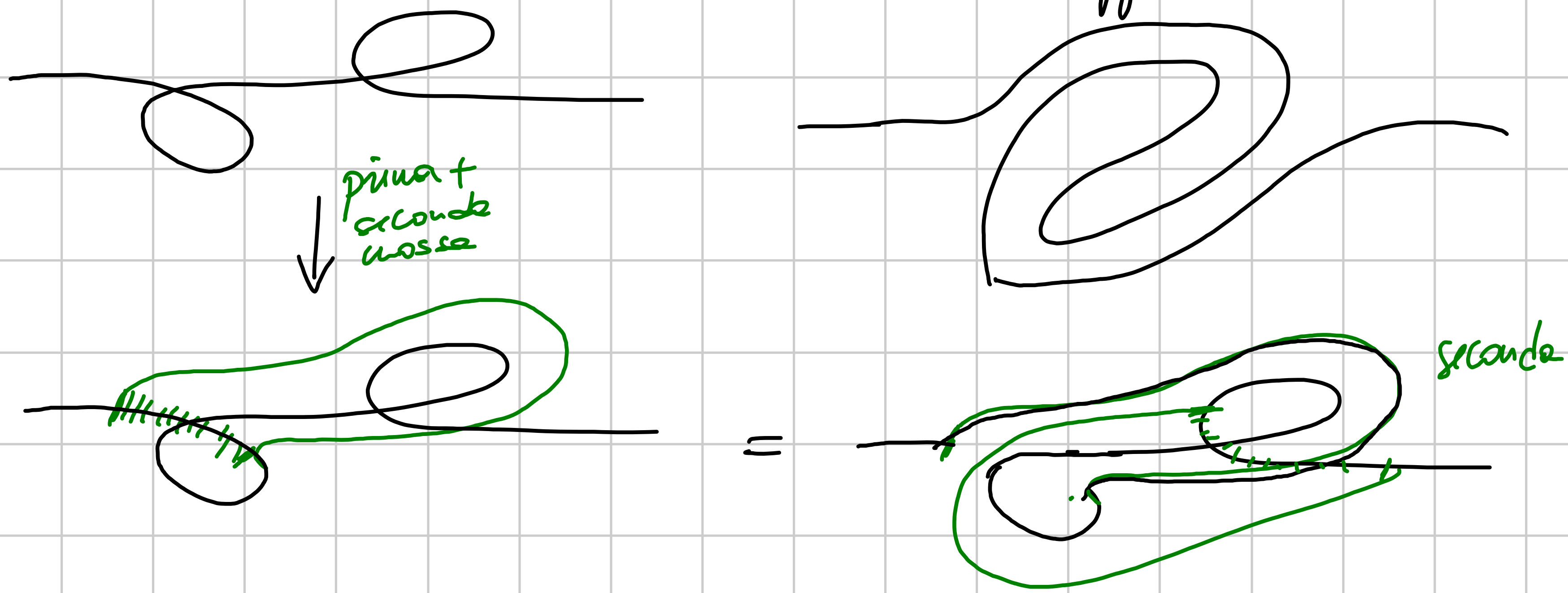


seconda mossa

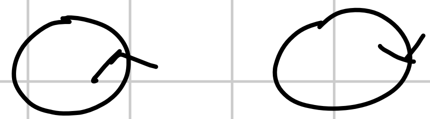


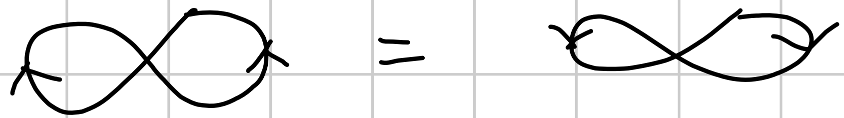
prima mossa

II. b Cancello riccioli da lati opposti:

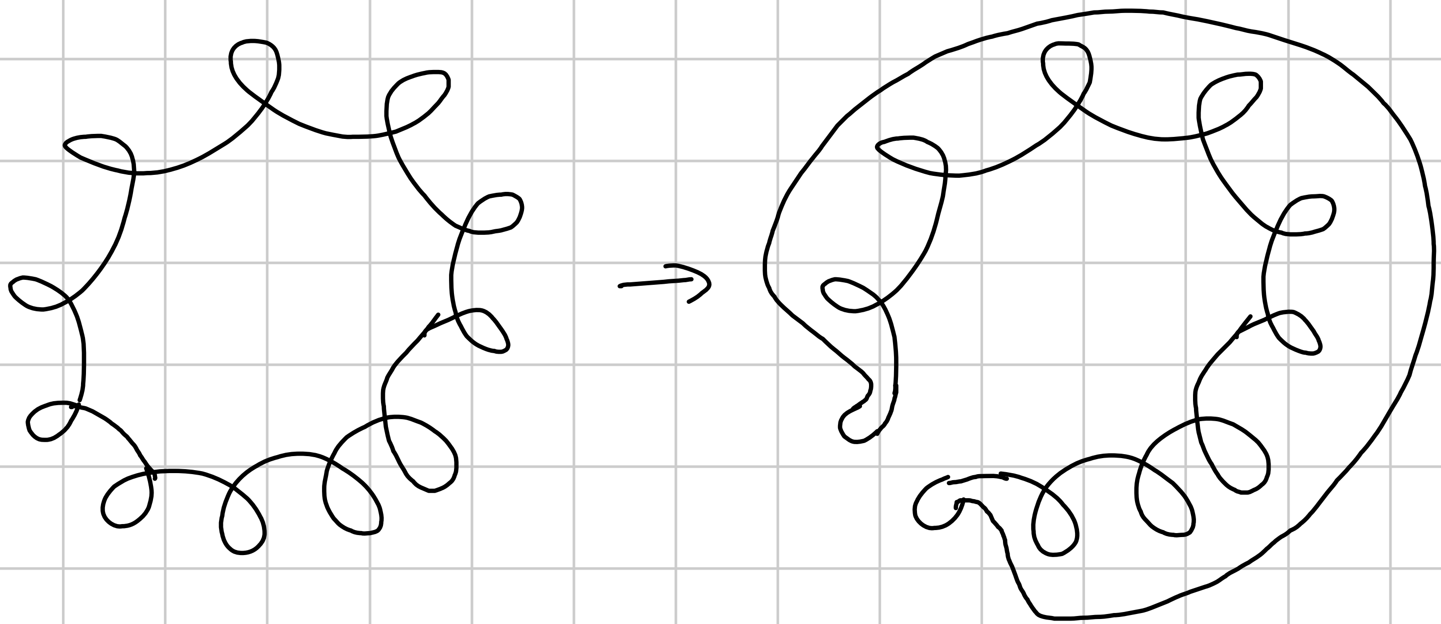


Conclusione: rimango o con nessun incrocio:



un solo incrocio 

≥ 2 incroci e riccioli tutti dalla stessa parte; basta vedere che se sono fuori posso metterli dentro:

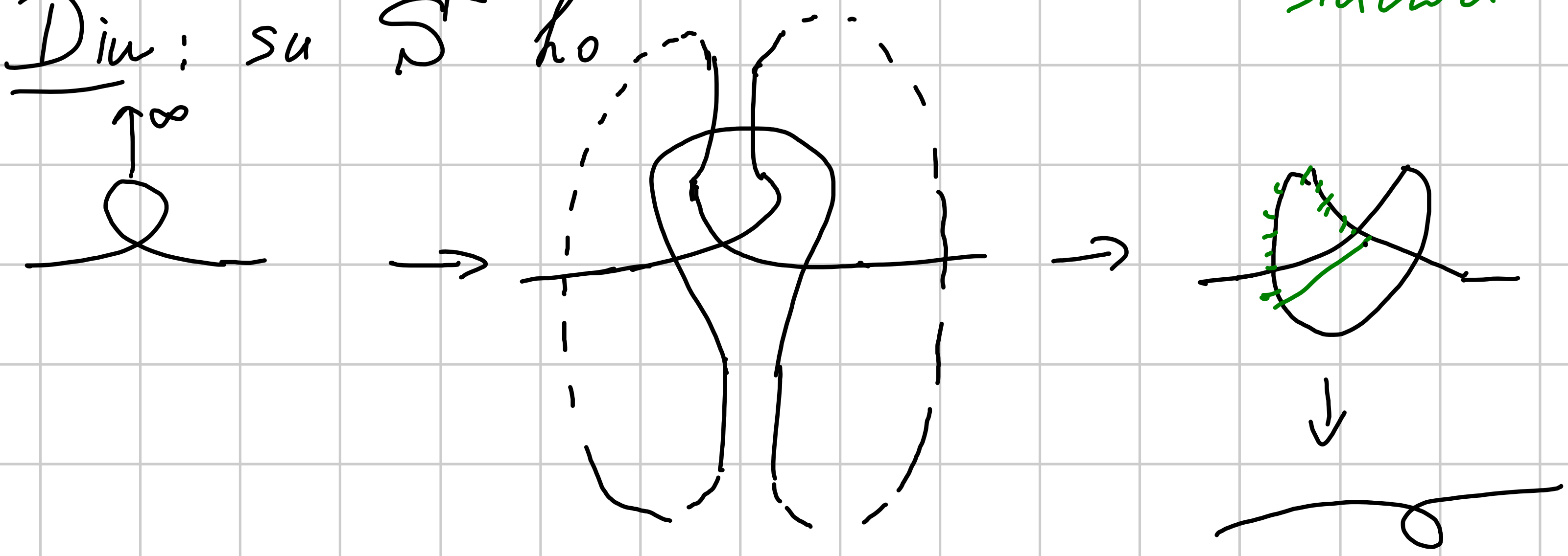


$\blacksquare$

Cor: Immersioni $S^1 \to S^2 \big/ \text{omotopie reg.} \longleftrightarrow \{0, 1\}$

parità del numero di incroci

Dim: su S^2 ho



I modelli di prima equivalgono tutti a 0 o 1.
Inoltre parità # incroci è invariante $\Rightarrow 0 \neq 1$.

$\blacksquare$

<u>Teo</u> (Jordan-Schönflies): se $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^2$ è omeo sull'immagine allora $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha(S^1)$ è $D \sqcup E$ con $\partial D = \partial E = \alpha(S^1)$ e $\overline{D} \cong D^2$, $\overline{E} \cong D^2 \setminus \{0\}$.

Attenzione: è vero TOP (ma diventa falso per $S^2 \to \mathbb{R}^3$).

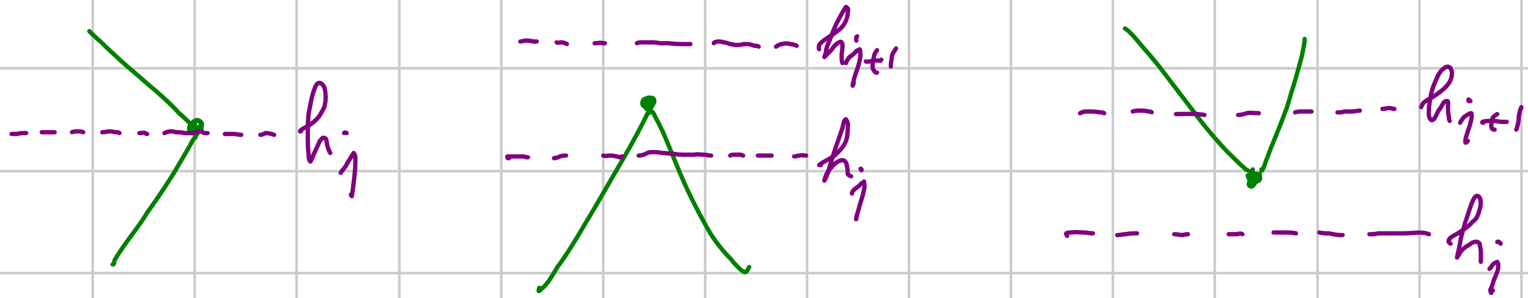
Faccio una dimo PL e una DIFF.

<u>PL</u>: Provo che se $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ è una poligonale $\cong S^1$ allora Γ borda un disco chiuso in $\mathbb{R}^2$.

Prendo v che non sia la direzione di alcun lato di Γ e definisco $h : \Gamma \to \mathbb{R}$ come $\pi_{v^\perp}$. In figura $v = (1,0)$; h = proiez orizzontale.

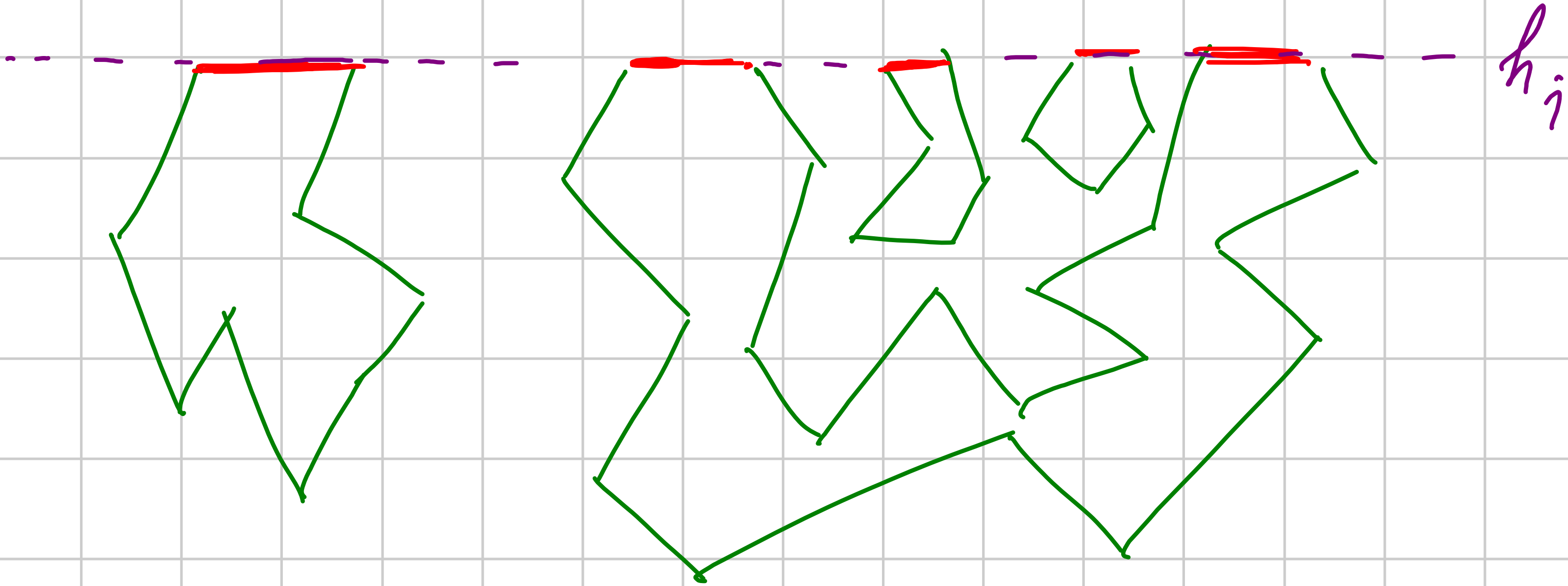
(altezza)

A meno di cambiare leggermente v posso supporre h iniettiva su $I^{[0]}$. Prendo altezze $-\infty < h_0 < h_1 < \dots < h_N < +\infty$ così:



Fatto (esercizio): $\# h^{-1}(h_j) \equiv \pmod 2$.

Definisco I_j come $h^{-1}((-\infty, h_j)) \cup$ segmenti orizzontali ad altezza j tra il primo e il secondo punto, tra il terzo e il quarto, ...

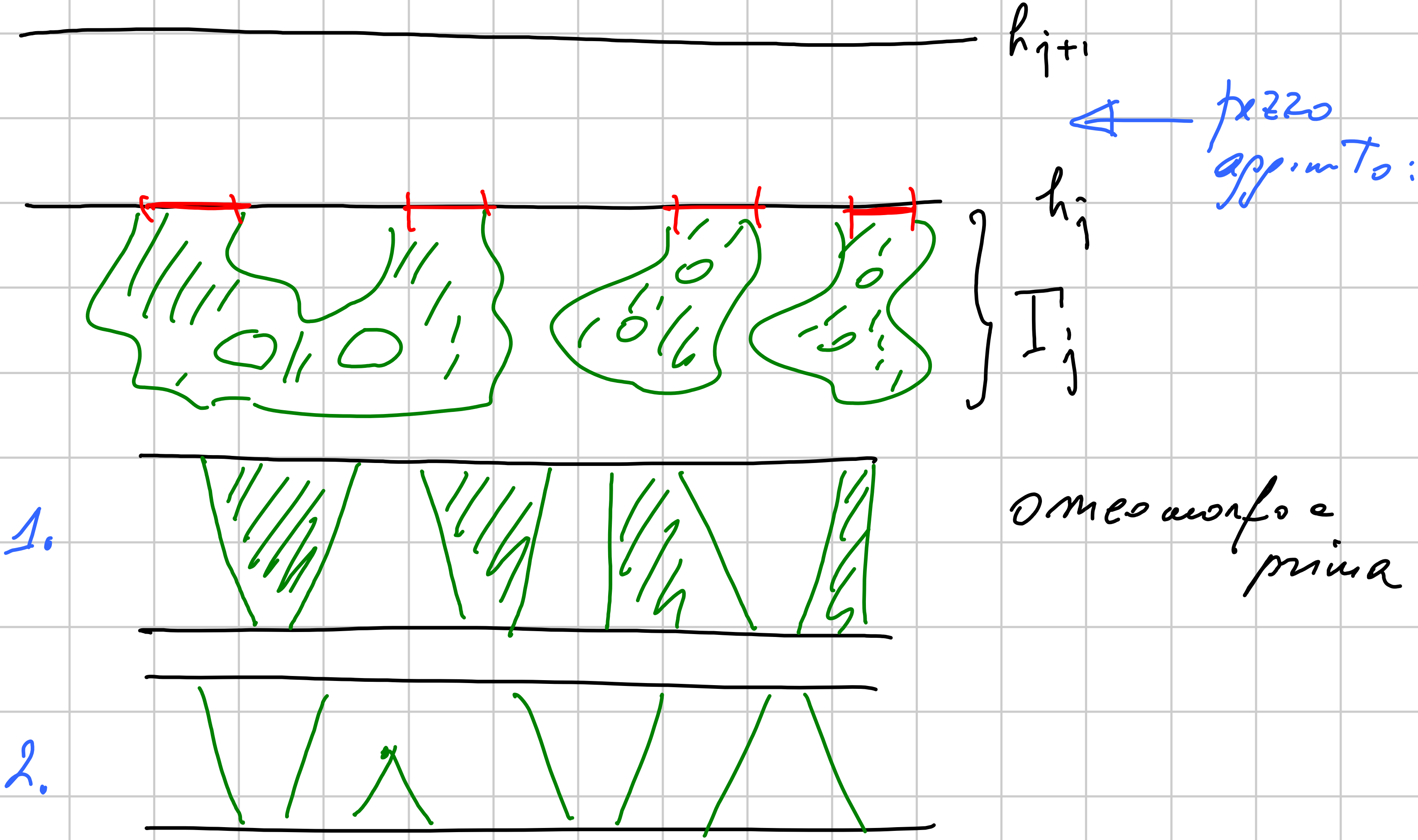


Provo per ricorrenza che I_j è bordo di una unione finita di dischi bucati chiusi.

Ciò basta: $I_N = T$ borda una unione finita di dischi chiusi ma T è convesso

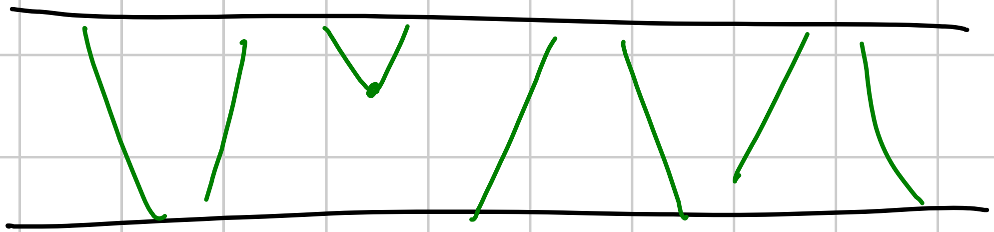
$\Longrightarrow$ borda un disco chiuso.

I_j borda $\bigcup$ dischi bucati $\Longrightarrow$ anche I_{j+1}.

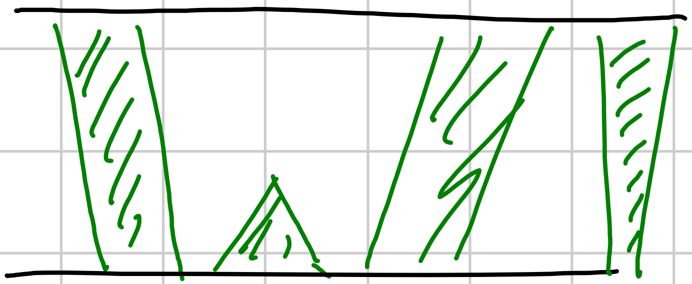


h_{j+1}
pezzo aggiunto:
h_j
Γ_j
1.
omeomorfo a prima
2.

3.



2a



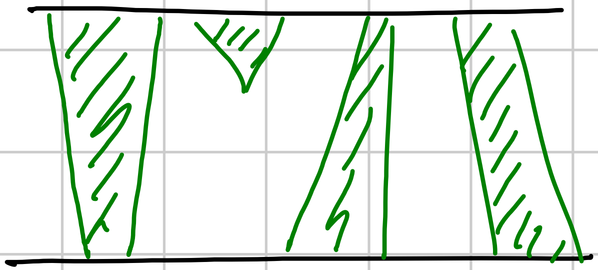
omeo a prima

2b

se $D_1 \neq D_2$ trovo un disco bucato in meno

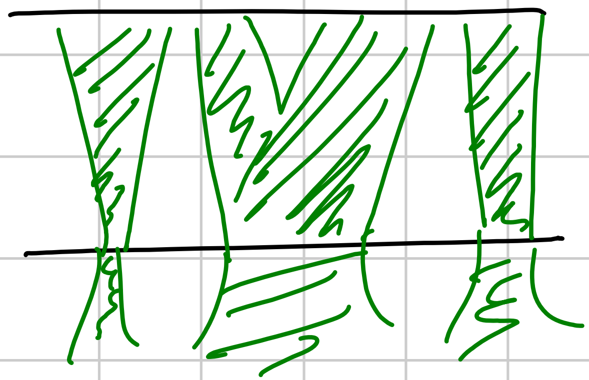
se $D_1 = D_2$ trovo un disco con un buco in più

3a.



un disco (non bucato) in più

3b



non cambia nulla

□

Oss: Il caso 2b. II in realtà non si dà mai.

Idea della dim DIFF:

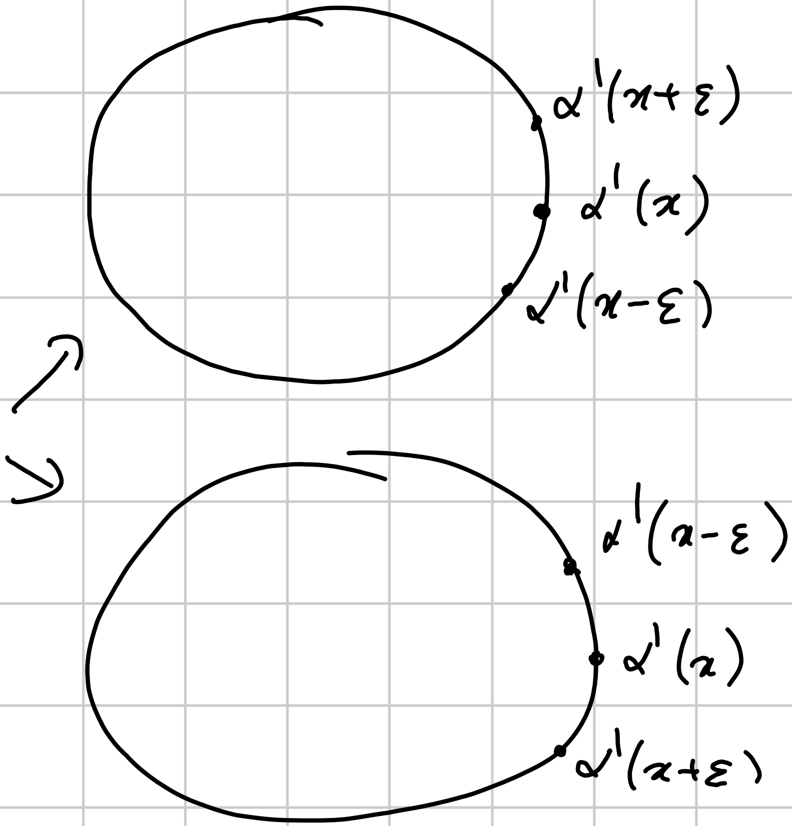
$\alpha : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ curva semplice e liscia

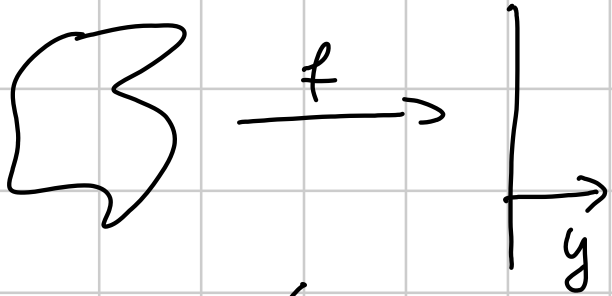
Consideriamo y valore regolare di $\dfrac{\alpha'}{\|\alpha'\|} : S^1 \circlearrowleft$

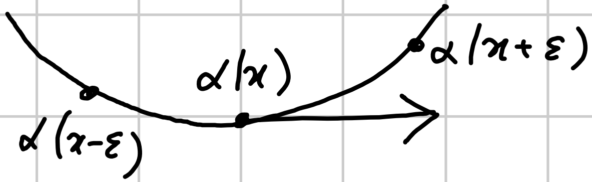
$f := \pi_{y^\perp} \circ \alpha$ _

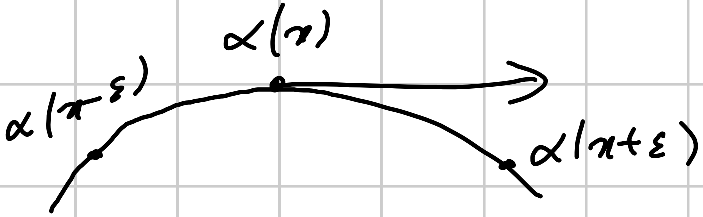
Se h è un valore critico di f ho
$h = f(x)$ con $\alpha'(x) \in \mathbb{R} \cdot y$ _
Però y è regolare per α' (wlog $\|\alpha'\| \equiv 1$)
dunque ho due casi

$y = (1,0)$









$\Longrightarrow$ i valori critici di f sono tutti immagini di massimi o minimi.

Cambiando y di poco posso anche supporre che tutti tali max e min siano ad altezze diverse;