ETA 25/11/14

<u>Lem</u>: $\varphi : \mathcal{C} \circlearrowleft$ $\mathcal{C}$ complesso di sp. vett.
∂, φ lineari

$$\Longrightarrow \sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi_i) = \sum_i (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi_{i_*}) .$$

Per catene di gruppi abeliani liberi per la $\sum_i (-1)^i \operatorname{tr}_i$

<u>catene</u>: (C1) uso $\mathbb{Z}$-basi

(C2) prendo $C_i \otimes \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$-basi chiaro $(C1) = (C2)$ _

<u>omologia</u> : (H1) uso $\mathbb{Z}$-basi di $H_i(\mathcal{C}) / \mathrm{Tor}(H_i(\mathcal{C}))$

(H2) posto $C_i^{\mathbb{Q}} = C_i \otimes \mathbb{Q}$, $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}} = (C_i^{\mathbb{Q}}, \partial_i)$
(sp. vett. che ha come base $\mathcal{X}^{[i]}$)
calcolo $H_i^{\mathbb{Q}} = H_i(\mathcal{C}_i^{\mathbb{Q}})$ e uso
$\mathbb{Q}$-basi di $H_i^{\mathbb{Q}}$ _

In generale è falso che $H_i(\mathcal{C} \otimes G) = H_i \otimes G$ però è vero se $G = \mathbb{Q}$, dunque

$$H_i^{\mathbb{Q}}(\mathcal{C}) = H_i(\mathcal{C}) \otimes \mathbb{Q}.$$

Ora ho: (C2) = (H2) grazie alle Prop sugli sp. vett.

ma $H_i^{\mathbb{Q}}(\mathcal{C}) \underset{\text{difficile}}{=} H_i(\mathcal{C}) \otimes \mathbb{Q} \underset{\text{ovvia}}{=} \dfrac{H_i(\mathcal{C})}{\mathrm{Tor}(H_i(\mathcal{C}))} \otimes \mathbb{Q}$

$\Longrightarrow$ (H2) = (H1)

$\Longrightarrow$ indirettamente ho (C1) = (H1).

<u>Def</u>: se $\mathcal{C}$ è un complesso di catene libero e $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definisco

$$\lambda(\varphi) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \, tr\left(\overline{\varphi_{i_*}} : \, {H_i}/_{Tor(H_i)} \circlearrowleft \right)$$

(numero di Lefschetz).

<u>Teo</u> (provato modulo $H_i^{\mathbb{Q}} \cong H_i \otimes \mathbb{Q}$) :

$$\lambda(\varphi) = \sum_i (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi_i) .$$

<u>Oss</u>: Se $f : X \to X$ ho $f_\# : C(X) \to C(X)$

(X complesso simpl / Δ-compl / compl. cell)

e $f_* : H_*(X) \to H_*(X)$. E posso

definire $\lambda(f) := \lambda(f_*)$.

Prop: $\lambda(f_*) = \lambda(f_\#)$ per f simpliciale.

(Utile perché $\lambda(f_*)$ è invariante per $\simeq$ mentre le $f_{\#_i}$ no.)

Oss: $\chi(X) = \lambda(id_X)$.

$$(id_X)_{\#_i} = id_{C_i(X)} \Longrightarrow tr\left((id_X)_{\#_i}\right) = \operatorname{rank} C_i = \# X^{[i]}$$

Def: se $g: X \to X$ è continua posso definire $\lambda(g)$ come $\lambda(f)$ dove f è una approx. simpliciale di g (ben def. perché $\lambda(f_0) = \lambda(f_1)$ se $f_0 \simeq f_1$ poiché $f_{0*} = f_{1*}$.

Teorema del pto fisso di Lefschetz:

Se X è complesso cpt (finito) e $g: X \to X$ è continua con $\lambda(g) \neq 0$ allora $Fix(g) \neq \emptyset$.

Oss: $\lambda(g)$ è invariante per $\simeq$ ma $Fix(g)$ no anzi esistono $g_0 \simeq g_1$ con $Fix(g_0) \neq \emptyset$, $Fix(g_1) = \emptyset$

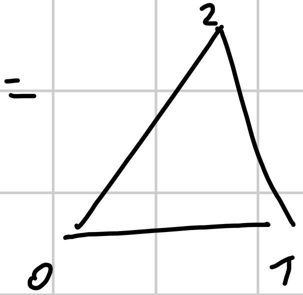
$(g_0 = id_{S^1} \, , \, g_1 = rot_\vartheta)$.

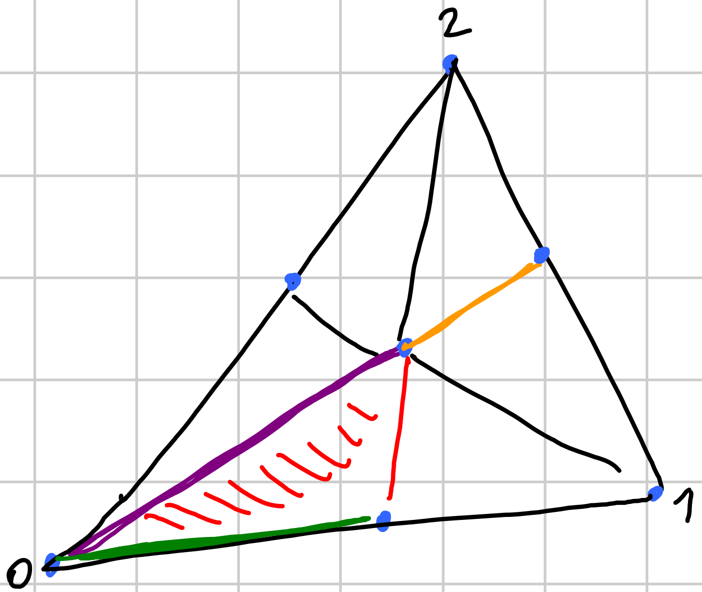
<u>Suddivisione baricentrica</u> K' di un c. simpliciale K

$\sigma = Conv(v_0, \dots, v_m)$ $\qquad c(\sigma) = \frac{1}{n+1}(v_0 + \dots + v_m)$.

$$K' = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma' \, ;$$

$$\sigma' = \{ Conv(c(\tau_0), c(\tau_1), \dots, c(\tau_k)) : \tau_j \subset \sigma \,,\; \tau_0 \subset \tau_1 \subset \dots \subset \tau_k \}$$

Es: $\sigma =$ 



0: $\quad 0 \quad 1 \quad 2$

$\quad 01 \quad 02 \quad 12$

$\quad 012$

1: $\quad 0 < 01 \quad 1 < 01$

$\quad 0 < 02 \quad 2 < 02$

$\quad 1 < 12 \quad 2 < 12$

$\quad 0 < 012 \quad 1 < 012 \quad 2 < 012$

$\quad 01 < 012 \quad 02 < 012 \quad 12 < 012$

2: $\quad 0 < 01 < 012$

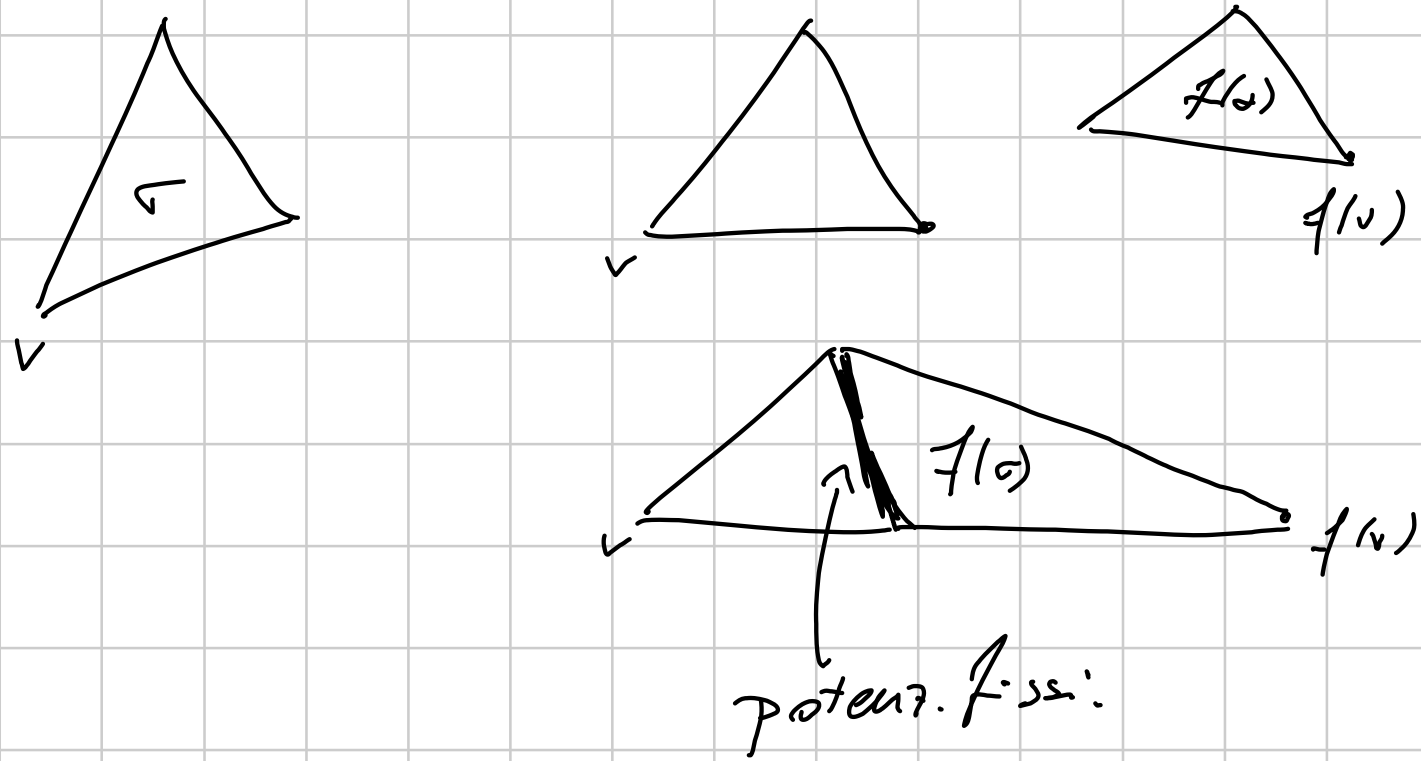
e altre 5

Oss: $\sigma' = (\partial\sigma)' \cup \{c(\sigma)\} \cup \{\text{cone}(c(\sigma), \tau) : \tau \in (\partial\sigma)'\}$ _

Lem: $f : K \circlearrowleft$ simpliciale
$\Longrightarrow \text{Fix}(f)$ sottocomplesso di K' _

Dim: Basta vedere che se $\sigma \in K$
$\text{Fix}(f|_\sigma)$ è sottocompl. di σ' _

Osservo: se $v \in \sigma^{[0]}$ e $f(v) \notin \sigma$ allora
$\text{Fix}(f|_\sigma) \subset$ faccia di σ opposta a v.



iterando posso supporre $f(\sigma) \subset \sigma$.

Ora $f(\sigma)$ è una faccia di σ

e $\mathrm{Fix}(f|_\sigma) \subset f(\sigma) \Longrightarrow$ iterando mi riduco a $f(\sigma) = \sigma$. Se $\sigma = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_n)$ $\exists\, \tau \in \mathfrak{S}_{n+1}$ t.c.

$$f(v_i) = v_{\tau(i)} \Rightarrow f\left(\sum_i t_i v_i\right) = \sum t_i v_{\tau(i)}$$

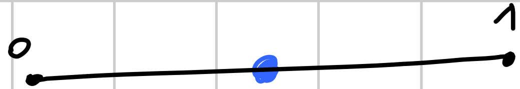
$$\Longrightarrow \mathrm{Fix}(f) = \left\{ \sum_i t_i v_i \;:\; t_i = t_{\tau(i)} \right\}.$$

$\Longrightarrow$ Mi basta provare che ogni equazione $t_i = t_j$ in σ definisca un sottocomplesso di σ' (perché l'intersezione di sottocomplessi lo è).

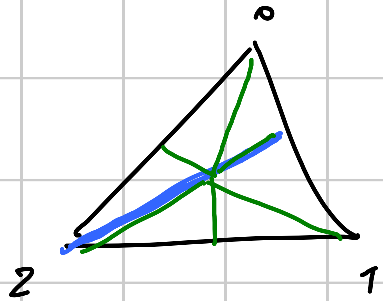
Si dimostra per induz. su n :

$n=0$

$n=1$ $\quad t_0=t_1$



$n=2$ $\quad t_0=t_1$



Passo induttivo : $\quad L_{ij} = \{ p \in \sigma : t_i(p) = t_j(p) \}$

Si vede che:

(1) $L_{ij} = \mathrm{cone}(c(\sigma), L^{\partial}_{ij})$ $\qquad L^{\partial}_{ij} = L_{ij} \cap \partial\sigma$

(2) $$L^{\sigma}_{ij} = \bigcup_{\substack{\eta < \partial\sigma \\ v_i, v_j \in \eta^{[0]}}} \underbrace{\{ p \in \eta : t_i(p) = t_j(p) \}}_{\text{sottocomplesso di } \eta' \text{ per ip. indutt.}} \cup \bigcup_{\substack{\eta < \partial\sigma \\ v_i \notin \eta^{[0]} \\ v_j \notin \eta^{[1]}}} \eta$$

$\dots$ $\square$

<u>Lem</u>: Sia $f : K \to K$ simpliciale t.c. $\mathrm{Fix}(f)$ sia sottocompl.

(poiché f <u>non</u> induce una $K' \to K'$ simpliciale, ciò non si applica alle tesi del Lem. prec.) _

Se $f(\sigma)=\sigma$ allora $\sigma \subset Fix(f)$.

Dim: $f(\sigma)=\sigma \Longrightarrow c(\sigma) \in Fix(f)$

ma allora $\sigma \subset Fix(f)$ poiché $Fix(f)$ è sottocompl. $\square$

Prop: sia $f: K \to K$ simpliciale t.c.

per ogni $\sigma \in K$ con $f(\sigma)=\sigma$ si ha $\sigma \subset Fix(f)$.

Allora $\lambda(f_*) = \chi(Fix(f))$.

Cor: per f simpliciale con la proprietà

$(f(\sigma)=\sigma \Rightarrow \sigma \subset Fix(f))$ se $\lambda(f) \neq 0 \Rightarrow Fix(f) \neq \emptyset$.

Dimo (prop): $\lambda(f_*) = \sum_i (-1)^i \, tr(f_{\# i})$

$$tr(f_{\# i}) = \sum_{\substack{\sigma \in X^{[n]} \\ f(\sigma)=\sigma}} \left(\frac{f(\sigma)}{\sigma} := \begin{cases} +1 & \text{se } f(\sigma) = +\sigma \\ \cancel{-1} & \cancel{\text{se } f(\sigma) = -\sigma} \end{cases} \right)$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in X^{[n]} \\ \sigma \subset Fix(f)}} 1 = \# \text{ i-simplessi in } Fix(f)$$

$\blacksquare$

Dimo (Teorema Pto Fisso per $g : X \to X$ continua con $\lambda(g) \neq 0$)

Per assurdo: $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$.

Prendo d distanza su X e $\varepsilon > 0$ t.c.

$d(x, g(x)) > \varepsilon \quad \forall x \in X$.

Sia K triang. di X con $\max\mathrm{diam}(K) < \varepsilon/2$

e $f: H \to K$ approx simpl. di g

(H suddivisione di K).

Conclusione errata: $f \simeq g \Rightarrow \lambda(f) = \lambda(g) \neq 0$

Inoltre $d(x, f(x)) \geq d(x, g(x)) - d(g(x), f(x))$

$> \varepsilon \qquad - \quad \varepsilon/2 \quad > \varepsilon/2$

$g(x), f(x) \in \tau \in \mathcal{K}$

$\Rightarrow \mathrm{Fix}(f) = \emptyset \qquad \mathrm{diam}(\tau) < \varepsilon/2$

ma non si può concludere che è assurdo perché a $f: \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ non si applica la prop. precedente (dovrei avere $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ + altre proprietà) –

Sia $s: \mathcal{C}(\mathcal{K}) \to \mathcal{C}(\mathcal{H})$ la mappa che induce l'isomorfismo in omologia:

$$\mathcal{K}^{[n]} \ni \sigma \longmapsto \sum_{\tau \in \mathcal{H}^{[n]},\, \tau \subset \sigma} \tau$$

Ho $f_{\#} : \mathcal{C}(\mathcal{H}) \to \mathcal{C}(\mathcal{K})$

$\lambda(s \circ f_{\#}) = \lambda(f_{*}) = \lambda(g) \neq 0$

per def. di λ perché $f \simeq g$

$s \circ f_{\#} : \mathcal{C}(\mathcal{H}) \to \mathcal{C}(\mathcal{H})$ ha $\lambda \neq 0$

$\Longrightarrow$ qualche coeff sulla diagonale della matrice di $s \circ f_{\#}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{H}^{[n]}$

$\bar{e} \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, \sigma \in \mathcal{H}^{[n]}$ t.c. σ ha coeff. $\neq 0$
nell'espansione di $f(\sigma) \in K^{[n]}$
come somma di elementi di $\mathcal{H}^{[n]}$

però $\quad \operatorname{diam}(f(\sigma)) < \varepsilon/2$

$d(x, f(x)) > \varepsilon/2$ _ Assurdo _ $\blacksquare$

———— o ————

Omologia singolare:

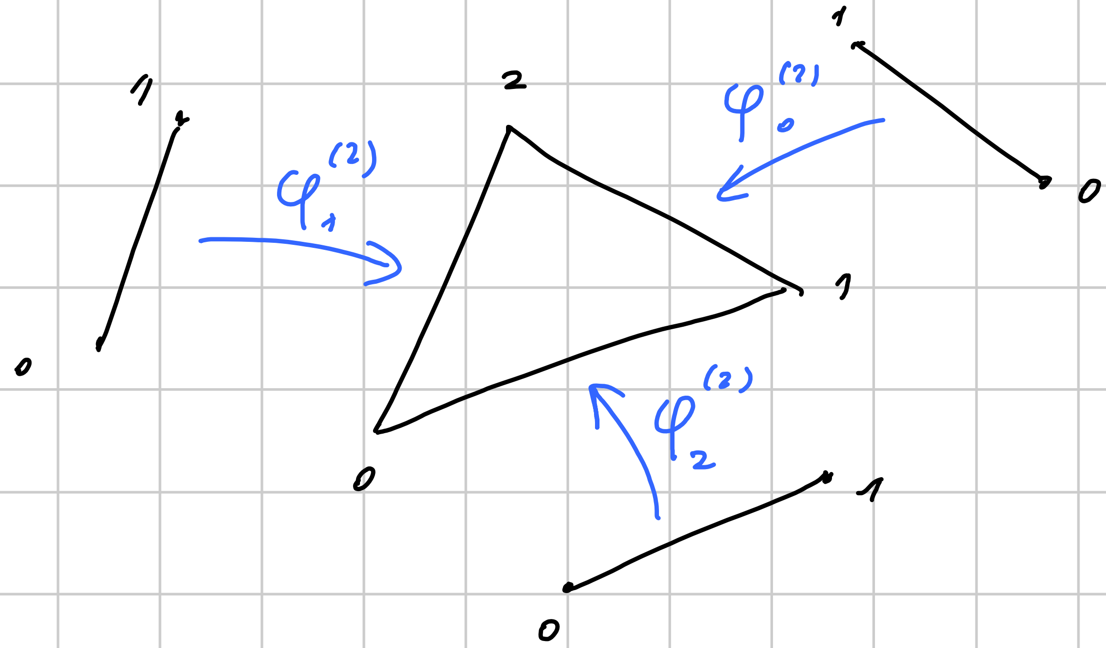
$\Delta_n = \mathrm{Conv}(e_0, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

X sp. top. Chiamo n-simplesso singolare una mappa $\sigma : \Delta_n \to X$ continua.

$C_n^{SING}(X)$ = gruppo libero generato dagli n-simplessi singolari.

Pongo: $\varphi_i^{(n)} : \Delta_{n-1} \to \Delta_n \qquad i = 0, \dots, n$

$$e_j \longmapsto \begin{cases} e_i & \text{per } j < i \\ e_{i+1} & \text{per } j \geq i \end{cases}$$



Definisco:

$$\partial_n^{SING} : C_n^{SING}(X) \longrightarrow C_{n-1}^{SING}(X)$$

$$\sigma \longmapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\sigma \circ \varphi_i^{(n)} \right)$$

Esercizio: $\partial_{n-1}^{SING} \circ \partial_n^{SING} = 0$

$\Longrightarrow \{(C_n^{SING}, \partial_n^{SING})\}$ complesso di catene

$\Longrightarrow H_n^{SING}(X)$.

Oss: esiste un Δ-complesso (enorme) la cui Δ-omologia è la omologia singolare di X:

$$S(X) = \bigsqcup_{\sigma \text{ simplesso sing}} \Delta^{(\sigma)}_{n(\sigma)} \Big/ \sim$$

$\sim$ generata da $p \sim q$ se esistono σ e τ e i

con $n(\tau) = \sigma(\tau) - 1$ t.c.

$$\tau = \sigma \circ \varphi_i^{n(\sigma)} \quad \text{e} \quad p \in \Delta^{(\sigma)}_{n(\sigma)}$$

$$q \in \Delta^{(\tau)}_{n(\sigma)}$$

$$\text{e } p = \varphi_i^{n(\sigma)}(q)$$

Interpretazione geometrica dei cicli singolari:

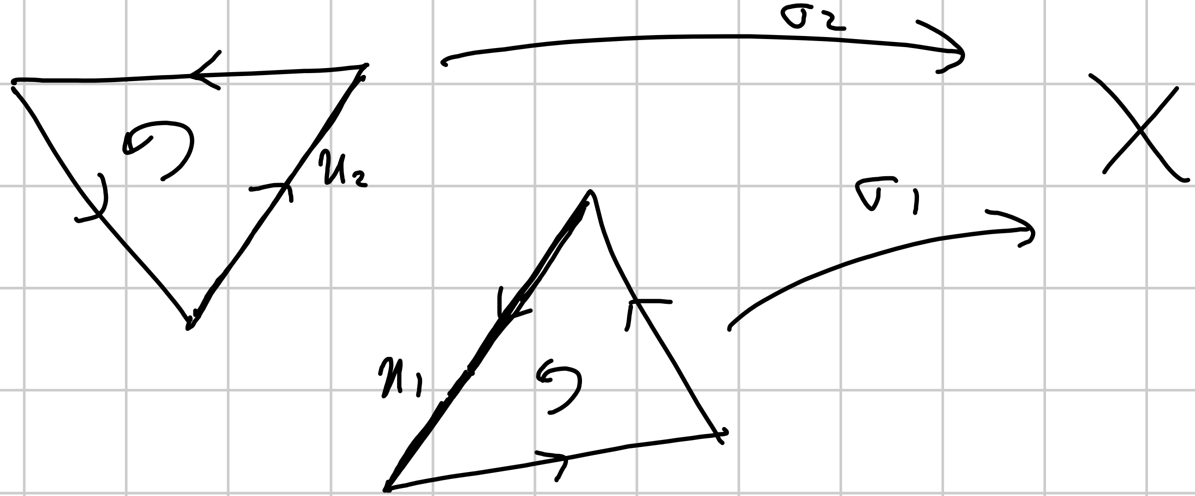
$z \in Z_n^{SING}(X)$; posso scrivere

$$z = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \cdot \sigma_i \qquad \sigma_i : \Delta_n \to X \qquad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}.$$

Posso prendere $\bigsqcup_{i=1}^{k} \left(\varepsilon_i \cdot \Delta_n^{(i)} \right)$

dove ($-\Delta_n = \Delta_n$ con orientaz. opposta):

$z = \sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \sigma_n : \bigsqcup \left(\varepsilon_i \cdot \Delta_n^{(i)} \right) \to X$



per ogni faccia di $\Delta_n^{(i)}$ esiste un'altra faccia di un altro $\Delta_n^{(j)}$ t.c. le restrizioni di σ_i e σ_j a tali facce coincidono come mappe ma hanno segno opposto

$\Longrightarrow$ esiste un accoppiamento simpliciale tra le facce dei $\bigsqcup(\varepsilon_i \cdot \Delta_n^{(i)})$ che inverte l'orientazione t.c. z passa al quoziente su $\bigsqcup(\ldots)/_{\text{accoppiamenti}}$

$\Longrightarrow$ z induce una coppia da

$$\left(\text{varietà } \underbrace{\text{con singolarità}}_{\text{orientata}} \text{ in codim} \geq 2\right) \longrightarrow X \quad -$$

Già visto : per $n=2$ $\qquad \bigsqcup \Delta_2/_{\text{accoppiamenti}}$

è una superficie non singolare.

Vale sempre: in generale ci sono singolarità solo in codim ≥ 3.