ETA 25/9/14

- petronio@dm.unipi.it
- queste lezioni vanno in rete

Oggi: intro alla teoria delle categorie

Categoria $\mathcal{C}$: $\quad Obj(\mathcal{C})$ oggetti (insiemi)

può non essere insieme

Per ogni X, Y in $Obj(\mathcal{C})$ è dato insieme $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ (anche $\emptyset$) t.c.

dati X, Y, Z in $Obj(\mathcal{C})$ se $Hom(X,Y), Hom(Y,Z) \neq \emptyset$ è dato

$$Hom(X,Y) \times Hom(Y,Z) \to Hom(X,Z)$$
$$(f,g) \longmapsto g \circ f$$

t.c. $\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

possono non essere funzioni

Inoltre per ogni X in $Obj(X)$

è dato $1_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$ t.c. $f \circ 1_X = f$, $1_X \circ g = g$.

Esempi: SET Obj = gli insiemi
Hom = le funzioni

TOP Obj = gli spazi top Hom = funz. continue

GROUP Obj = i gruppi Hom = omomorfismi

INJ, SURJ, BIJ sottocategorie di SET
con Obj = gli insiemi e Hom = funz. iniettive/suriettive/biiettive

Esempio: X poset (insieme parz. ord)

$$\mathcal{C} = X \qquad Hom(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\} & \text{se } x \leq y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $1_X = (x,x) \quad \forall x \in X$.

Vale la regola di composizione: ha senso comporre $Hom(x,y) \times Hom(y,z) \to Hom(x,z)$ solo se $\underbrace{Hom(x,y)}_{\text{sono non } \emptyset}$, $Hom(y,z)$ sono non $\emptyset$

ovvero se $x \leq y$ e $y \leq z$ ma in tal caso $x \leq z$ (transitiva) $\Rightarrow$ ha senso e funziona.

Esempio: $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ = i gruppi

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ = le classi di coniugio degli omomorfismi di gruppo $X \to Y$

$f_1, f_2 : X \to Y$ $\quad$ $f_1 \sim f_2$ se $\exists\, y_0 \in Y$ t.c.

$$f_2(x) = y_0^{-1} \cdot f_1(x) \cdot y_0 \quad \forall x \in X$$

Composizione: $[g] \circ [f] = [g \circ f]$

ben def!

$$X \xrightarrow{f_1, f_2} Y \xrightarrow{g_1, g_2} Z$$

$f_2(x) = y_0^{-1} \cdot f_1(x) \cdot y_0 \qquad g_2(y) = z_0^{-1} \cdot g_1(y) \cdot z_0$

$$(g_2 \circ f_2)(x) = g_2(y_0^{-1} \cdot f_1(x) \cdot y_0)$$

$$= g_2(y_0)^{-1} \cdot g_2(f_1(x)) \cdot g_2(y_0)$$

$$= \underbrace{g_2(y_0)^{-1} \cdot z_0^{-1}}_{z_1^{-1}} \cdot (g_1 \circ f_1)(x) \cdot \underbrace{z_0 \cdot g_2(y_0)}_{z_1}$$

Associatività + identità ovvie _

—— o ——

$\mathcal{C}$ categoria generale

Def: se $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in Hom(Y, X)$

e $g \circ f = 1_X$ diciamo che g è

inverso sinistro di f e f è inverso destro di g.
Se anche $f \circ g = 1_Y$ diciamo che sono inversi uno dell'altro e isomorfismi (dunque X e Y isomorfi).

Lem: (a) 1_X è unico
(b) se f ha un inverso dx e uno sin essi coincidono
(c) se f ha un inverso esso è unico

Dim: (a) se $1_X, \tilde{1}_X$

$$1_X \circ \tilde{1}_X = \begin{cases} \to 1_X & \text{usando } \tilde{1}_X \text{ a dx} \\ \to \tilde{1}_X & \text{usando } 1_X \text{ a sin} \end{cases}$$

(b) $f \circ g = 1_Y \qquad h \circ f = 1_X$

$$h = h \circ 1_Y = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = 1_X \circ g = g$$

(c) segue da (b). $\boxtimes$

<u>Esempio</u>: $\mathcal{C}$ categoria; costruisco nuova $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$

$$\mathrm{Obj}(\mathrm{Hom}(\mathcal{C})) = \bigcup_{X,Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

illegale

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \qquad g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W)$

$$\mathrm{Hom}(f,g) = \left\{ (a,b) : \begin{array}{l} a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ b \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,W) \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "b"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd}$$

$$g \circ a = b \circ f$$

$$1_f = (1_X, 1_Y) \quad \text{si} \quad f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$$

$$\underset{(a,b)}{\mathrm{Hom}(f,g)} \times \underset{(c,d)}{\mathrm{Hom}(g,h)} \longrightarrow \underset{(c \circ a,\, d \circ b)}{\mathrm{Hom}(f,h)}$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "b"] \\
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "d"] \\
S \arrow[r, "h"] & T
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c\circ a"'] & Y \arrow[d, "d\circ b"] \\
S \arrow[r, "h"'] & T
\end{tikzcd}
$$

associativa e $\mathbb{1}_X$: <u>OK</u>.

<u>Esempio</u>: data $\mathcal{C}$ con $Obj(\mathcal{C})$ = insiemi con qualche struttura

e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ = le mappe $X \to Y$ che preservano la struttura.

Costruisco $\mathcal{P}$ = categoria delle coppie derivata da $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{P}) = \{ i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X) \ : \ i \text{ iniettiva} \}$$

(in pratica si scrive (X,A) invece di i)

perché via i, A è sottoinsieme di X)

$$\mathrm{Hom}(i,j) = \left\{ (p,q) \quad \text{t.c.} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "q"] \\ B \arrow[r, hook, "j"] & Y \end{tikzcd} \right\}$$

In pratica $f : (X, A) \to (Y, B)$ è una $f : X \to Y$ omomorfismo t.c. $f(A) \subset B$.

Def: Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorie. Un funtore covariante da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ è il dato di

- "$F : Obj(\mathcal{C}) \to Obj(\mathcal{D})$" (una regola che associa a ogni oggetto di $\mathcal{C}$ uno di $\mathcal{D}$)

- $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ t.c.

$$F(1_X^{\mathcal{C}}) = 1^{\mathcal{D}}_{F(X)}$$

$$F(f \circ_{\mathcal{C}} g) = F(f) \circ_{\mathcal{D}} F(g)$$

Un funtore controvariante è

$$F : \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$$

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$$ t.c.

$$F(1_X^{\mathcal{C}}) = 1^{\mathcal{D}}_{F(X)} \qquad F(f \circ_{\mathcal{C}} g) = F(g) \circ_{\mathcal{D}} F(f)$$

covariante

$$\begin{array}{c} X \xrightarrow{f} Y \\ \rightsquigarrow \\ F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \end{array}$$

controvariante

$$\begin{array}{c} X \xrightarrow{f} Y \\ \rightsquigarrow \\ F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y) \end{array}$$

<u>Oss</u>: Se $X \underset{\mathcal{C}}{\cong} Y$ allora $F(X) \underset{\mathcal{D}}{\cong} F(Y)$

(sia per F covariante sia controvariante) _

Dunque se $\mathcal{C}$ è una categoria di oggetti topologici (TOP,

$TOP^* = $ (spazi topologici puntati, mappe puntate))
e $\mathcal{D}$ è una categoria algebrica (GROUP)
allora F è un invariante. Esempio:

$$\pi_1 : TOP^* \longrightarrow GROUP$$

$\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0) \rightsquigarrow \underset{\substack{\| \\ \pi_1(f)}}{f_*} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

e $id_* = id_{\pi_1}$ $\quad (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Def: data $\mathcal{C}$ categoria costruisco $OP(\mathcal{C})$ categoria opposta con

$$Obj(OP(\mathcal{C})) = Obj(\mathcal{C})$$

$$Hom_{OP(\mathcal{C})}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

$$1_X^{OP(\mathcal{C})} = 1_X^{\mathcal{C}} \qquad g \circ_{OP(\mathcal{C})} f = f \circ_{\mathcal{C}} g$$

Oss: i funtori controvarianti $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ corrispondono in modo naturale ai funtori covarianti $\mathcal{C} \to OP(\mathcal{D})$ _

<u>Esempi</u>: GROUP. Γ gruppo fissato _

$F : \text{GROUP} \to \text{GROUP}$

$F(G) = \text{Hom}(\Gamma, G)$ con moltiplicazione puntuale:

$$(f_1 \cdot_{\text{Hom}(\Gamma,G)} f_2)(\gamma) = f_1(\gamma) \cdot_G f_2(\gamma)$$
$$\forall \gamma \in \Gamma$$

$F : \text{Hom}(G,H) \to \text{Hom}(\text{Hom}(\Gamma, G), \text{Hom}(\Gamma, H))$

$$\underset{f}{\overset{\in}{}} \longmapsto \left(\overset{\in}{\varphi} \mapsto \overset{\in}{f\circ\varphi} \right)$$

$$\Gamma \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{f} H$$

funtore covariante

<u>Esempio</u>: Γ gruppo, F : GROUPS

$$F(G) = \mathrm{Hom}(G, \Gamma)$$

$$F : \mathrm{Hom}(G,H) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Hom}(H,\Gamma), \mathrm{Hom}(G,\Gamma)\big)$$

$$\begin{array}{ccc} \in & & \in \qquad\qquad \in \\ f & \longmapsto & (\varphi \longmapsto \varphi \circ f) \end{array}$$

$$G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\varphi} \Gamma \qquad \text{funtore controvariante}$$

$$\_\_\_\_ \circ \_\_\_\_$$

Def: se F, G sono funtori covarianti da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ chiamo trasformazione naturale da F a G il dato di una $\varphi_X : F(X) \longrightarrow G(X)$

$(\varphi_X \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$

t.c. $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ si ha :

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\varphi_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(Y) \arrow[d, "\varphi_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Def. simile per F controvariante.

$S \subset \mathbb{R}^N$ $\quad$ $\mathrm{Aff}(S)$ = più piccolo ssp. aff che $\supset S$

$\mathrm{Conv}(S)$ = inviluppo convesso di S

= più piccolo convesso che $\supset S$.

Lem: (1) $\mathrm{Aff}(v_0, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$

(2) $\mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, \; t_i \geq 0 \right\}$

combinazione convessa

Dim: So che $\mathrm{Aff}(v_0, \dots, v_n) = v_0 + \mathrm{Span}(v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0)$

Devo passare da $v_0 + \lambda_1(v_1 - v_0) + \dots + \lambda_n(v_n - v_0)$ a

$t_0 v_0 + \dots + t_n v_n$ con $\sum_i t_i = 1$

e viceversa: infatti

$$v_0 + \lambda_1(v_1 - v_0) + \dots + \lambda_n(v_n - v_0) =$$

$$\underbrace{(1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n)}_{t_0} v_0 + \underbrace{\lambda_1}_{\overset{\shortparallel}{t_1}} v_1 + \dots + \underbrace{\lambda_n}_{\overset{\shortparallel}{t_n}} v_n$$

ho $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$

(viceversa analogo) –

(2) Chiamo $C = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_n)$

$$D = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \; : \; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, \; t_i \geq 0 \right\}$$

Provo che $C \supseteq D$: sia $\sum_i t_i v_i \in D$.

Dimostro che sta in C per induzione su

$$k := \#\{i : t_i \neq 0\}$$

Per $k=1$ ho $t_i = 1$ e gli altri 0

$\Rightarrow$ il punto è v_i, che è in C.

Per $k+1 > 1$ wlog $t_0, \dots, t_k > 0$, $t_{k+1} = \dots = t_n = 0$

Ora: $0 < t_0 < 1$ dunque

$$\sum_{i=0}^{n} t_i v_i = \underbrace{t_0 v_0}_{\in C} + (1-t_0) \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{\underbrace{1-t_0}_{\lambda_i}} v_i$$

$\lambda_i \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{k} t_i' = \frac{\sum_{i=1}^{k} t_i}{1-t_0} = \frac{1-t_0}{1-t_0} = 1$$

comb. convesse di k dei $v_0, \dots, v_n$
$\Longrightarrow$ per ipotesi induttiva $\in C$

$\Longrightarrow \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$ è comb. conv. di el'ti di C
$\Longrightarrow$ sta in C

Provo $D \supseteq C$ – Basta vedere:

- $D \ni v_0, \dots, v_n$ (basta prendere $t_i = 1$, nulli gli altri)

- che è convesso:

$t_i \geq 0 \quad \sum t_i = 1$

$r_i \geq 0 \quad \sum r_i = 1$

$$\lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} t_i v_i + (1-\lambda) \sum_{i=0}^{n} r_i v_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\lambda t_i + (1-\lambda) r_i\right)}_{u_i} v_i$$

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = 1 \quad , \quad u_i \geq 0 .$$

$\blacksquare$

<u>Lem</u>: dati $v_0, \dots, v_m \in \mathbb{R}^N$ sono fatti equiv:

(1) $\nexists$ stsp. aff. di $\mathbb{R}^N$ di dim $m-1$ che contiene $v_0, \dots, v_m$

(2) $\dim(\mathrm{Span}(v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0)) = m$

(3) Se $\sum_{i=0}^{m} t_i v_i = 0$ con $\sum_{i=0}^{m} t_i = 0$ allora $t_i \equiv 0$

(4) Ogni el. di $\mathrm{Aff}(v_0, \dots, v_m)$ ha unica espressione come

$$\sum_{i=0}^{m} t_i v_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{m} t_i = 1$$

(5) Ogni el. di $\mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_m)$ ha unica espressione come

$$\sum_{i=0}^{m} t_i v_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{m} t_i = 1, \quad t_i \geq 0.$$

Def: in ciascuno di questi casi dico che $v_0, \dots, v_n$ sono affinemente indipendenti.

Dim: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Poiché la giacitura di $Aff(v_0, \dots, v_n)$ è $Span(v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0)$

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Devo passare da una comb. lin di $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ a una comb. di $v_0, \dots, v_n$ con coeff aventi somma 0

(già visto)

$(3) \Rightarrow (4)$ Sia $\sum_{i=0}^{n} t_i v_i = \sum_{i=0}^{n} s_i v_i$ con $\sum_{i=0}^{n} t_i = \sum_{i=0}^{n} s_i = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(t_i - s_i)}_{r_i} v_i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n} r_i = 0$$

per (3) ho $r_i \equiv 0 \Rightarrow s_i = t_i$

$(4) \Rightarrow (3)$ Sia p.e. $\sum_{i=0}^{n} t_i v_i = 0$ con $\sum_{i=0}^{n} t_i = 0$

e non tutti i t_i nulli.

Wlog $t_0 \neq 0 \Rightarrow 1 \cdot v_0 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(-\frac{t_i}{t_0}\right)}_{u_i} v_i$

due espressioni
diverse di un el't_0
di $\mathrm{Aff}(v_0, \dots, v_m)$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \frac{-\sum_{i=1}^{m} t_i}{t_0} = \frac{t_0}{t_0} = 1$$

$(4) \Rightarrow (5)$ ovvia

$(5) \Rightarrow (3)$ Sia p.a. $\sum_{i=0}^{m} t_i v_i = 0$, $\sum_{i=0}^{m} t_i = 0$ e non tutti $t_i = 0$.

Wlog $t_0, \dots, t_k > 0$, $t_{k+1}, \dots, t_h < 0$, $t_{h+1} = \dots = t_m = 0$

Posto $a = \sum_{i=0}^{k} t_i = -\sum_{j=k+1}^{h} t_j > 0$

h_0 $$\sum_{i=0}^{k} \underbrace{\frac{t_i}{a}}_{u_i} v_i = \sum_{j=k+1}^{n} \underbrace{\left(-\frac{t_j}{a}\right)}_{\pi_i} v_j$$

$\sum u_i = 1$

$u_i \geq 0$

due espressioni diverse dello stesso elto di $Conv(v_0, \dots, v_m)$

$\sum \pi_i = 1$

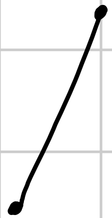
$\pi_i \geq 0$

$\boxtimes$

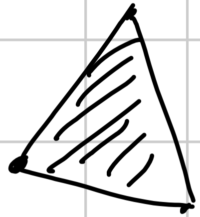
Def: chiamo simplesso σ in $\mathbb{R}^N$

$\sigma = Conv(v_0, \dots, v_m)$ con $v_0, \dots, v_m$ affinemente indipendenti.

$n=0$



$n=1$



$n=2$

$n=3$

Chiamo <u>faccia</u> di σ una $\tau = \mathrm{Conv}(v_{i_0}, \dots, v_{i_k})$ (ese: è un simplesso). Chiamo <u>supporto</u> di σ

$$A(\sigma) = \mathrm{Aff}(v_0, \dots, v_n)$$

$N=3 \quad m=2$