ETA 23/10/14

Notazione: "$M^{(n)}$" = "M è una n-varietà"

$M^{(n)}$ "chiusa" = compatta senza bordo

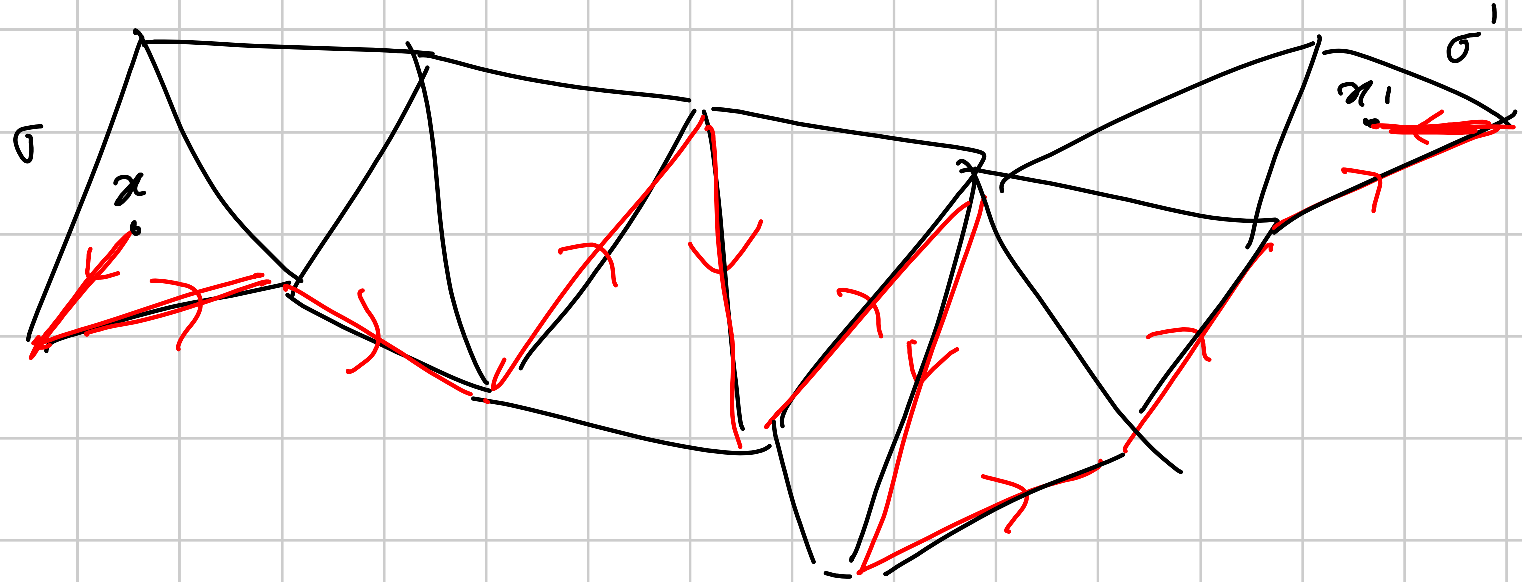
(cpt: automatico nel caso PL).

Teo: $H_n(M^{(n)}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & M \text{ orient} \\ 0 & \text{non orient.} \end{cases}$

M connessa

Dim per M ori: basta dati $\sigma, \sigma' \in K^{[n]}$

$(M = |K|)$ esistono $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k = \sigma' \in K^{[n]}$ t.c. $\sigma_{j-1} \cap \sigma_j = \tau_j \in K^{[n-1]}$. Prendo una spezzata da $x \in \mathrm{int}(\bar{\sigma})$ a $x' \in \mathrm{int}(\sigma')$:



Perturbola spezzata in modo che eviti $K^{[n-2]}$
Basta prendere gli el. di $K^{[n]}$ successivamente visitati da essa.

Proviamo che se $H_n(M) \neq 0$ allora M è ori.

Sia $z = \sum_{\sigma \in K^{[n]}} n_\sigma \cdot \sigma \in Z_n(M)$, $z \neq 0$.

A meno di cambiare le orientaz. su $K^{[n]}$ posso supporre che $n_\sigma \geq 0$.

Se $\tau \in K^{(n-1)}$ e $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$, $\sigma_i \in K^{(n)}$

il coeff di τ in ∂z è $n(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_1, \tau) +$
$n(\sigma_2) \cdot \varepsilon(\sigma_2, \tau)$

e deve essere nullo ($z \in Z_n(M)$).

Allora o $n(\sigma_1) = n(\sigma_2) = 0$ (in tal caso come sopra si conclude che $z = 0$: NO),

oppure $n(\sigma_1) > 0 \Rightarrow \varepsilon(\sigma_1, \tau) + \varepsilon(\sigma_2, \tau) = 0$

$\Rightarrow$ ho trovato un'orientazione. $\blacksquare$

Se M è orientata chiamiamo classe fondamentale il generatore $[M]$ di $H_n(M)$ dato da

$\sum_{\sigma \in K^{[n]}} \sigma$ se K è un c.s. con $|K| = M$ e con l'orientaz. di M.

E' ben def perché l'isomorfismo

$$H_n(K) \longrightarrow H_n(H)$$

è canonico se H suddivide K ed è orientato come K.

Def: se $M^{(n)}$, $N^{(n)}$ sono chiuse orientate e $f: M \to N$ è continua chiamo grado di f l'intero $\deg(f)$ t.c. $f_*([M]) = \deg(f) \cdot [N]$.

È ben def perché: f_* è def come $g_* \circ s$ dove s è una suddivisione e g è simpliciale nella suddivisione; inoltre

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(\mathcal{K}_0) \arrow[dr, "g_{0*}"] & \\
H_n(X) \arrow[ur, "s_0"] \arrow[dr, "s_1"'] & & H_n(\mathcal{L}) \\
 & H_n(\mathcal{K}_1) \arrow[ur, "g_{1*}"'] &
\end{tikzcd}$$

so che commute ed f_0, f_1 sono canonici perché tutte le orientazioni sono quelle di M.

<u>Oss</u>: $f_0 \simeq f_1 \Rightarrow \deg(f_0) = \deg(f_1)$

<u>Cor</u>: se $M^{(n)}$ è chiusa, $id_M \not\simeq$ cost.

Calcolo locale del grado:

Prop: se $M = |K|$, $N = |L|$ e $g : K \to L$ è simpliciale, fissato $\tau \in L^{[n]}$ se $\{\sigma \in K^{[n]} : g(\sigma) = \tau\} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ e $\delta_i = \begin{cases} +1 & \text{se } g : \sigma_i \to \tau \text{ è orientata} \\ -1 & \end{cases}$

allora

$$\deg(g) = \delta_1 + \dots + \delta_p.$$

Dim: $[M] = \sum_{\sigma \in K^{[n]}} \sigma$

$$\Rightarrow g_*([M]) = \sum_{\sigma \in K^{[n]}} \delta(\sigma) \cdot g_*(\sigma)$$

e in questa somma

- il coeff. di τ è $\delta_1 + \dots + \delta_p$
- so già che tutti i coeff. sono uguali tra loro e uguali a $\deg(g)$. $\blacksquare$

Versione liscia del grado.

<u>Def</u>: data $f : M^{(m)} \longrightarrow N^{(n)}$ chiuse dico:

•) $x \in M$ regolare se df_x è surgettivo

•) $x \in M$ critico se non reg.

- $y \in N$ critico se $y = f(x)$ con x critico
- $y \in N$ regolare se non è critico

Def: $W^{(p)} \subset M^{(m)}$ è una sottovarietà se localmente (M, W) è diffeo a $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p \times 0^{m-p})$ _

Prop: se y è un valore regolare di $f: M^{(m)} \to N^{(n)}$ allora $f^{-1}(y)$ è una $m-n$ sottovar di M; inoltre se M, N sono orientate, $f^{-1}(y)$ è canonicamente orientata.

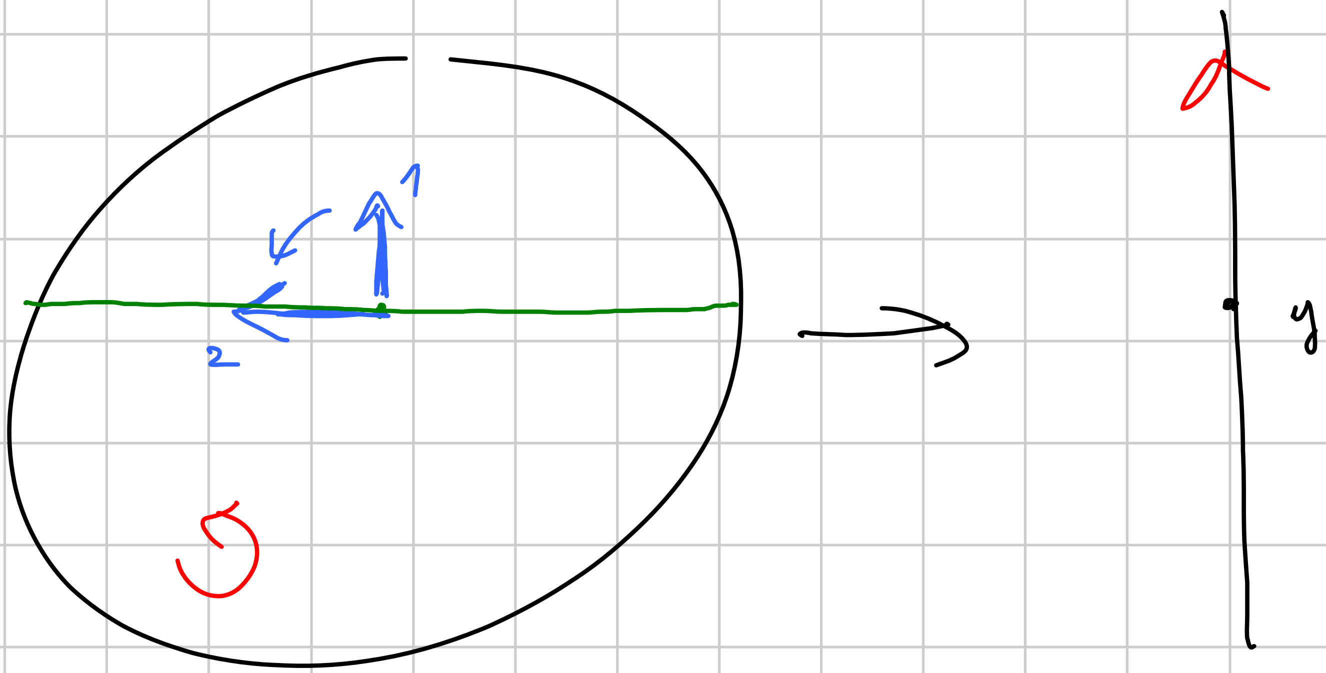
<u>Dim</u>: Per il teo delle funz. implicite la f avendo ovunque df surgettivo è loc. una proiez.

$$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \implies \text{loc. } f^{-1}(y) = 0^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

$\implies$ sottovarietà.

Una base $w_{n+1}, \dots, w_m$ di $T_x(f^{-1}(y))$ è positiva se scelti $w_1, \dots, w_n$ con

$df_x(w_1), \dots, df_x(w_m)$ base pos. di $T_y N$ si ha che $w_1, \dots, w_m$ è base pos. di $T_x M$:

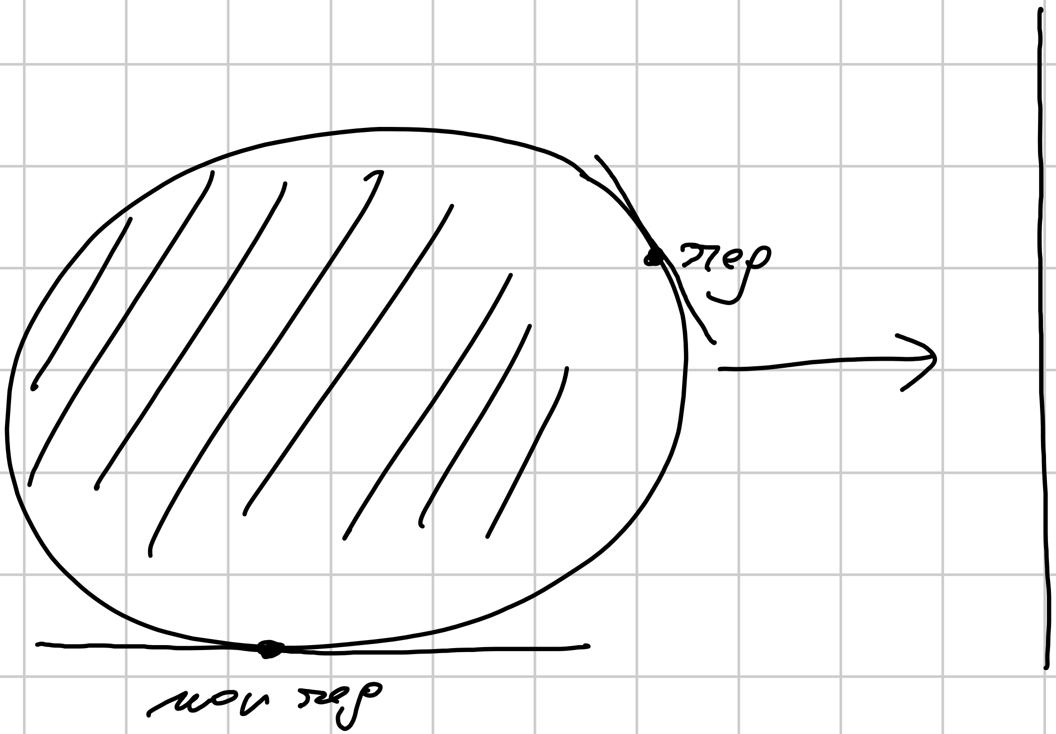


$m = 2$ $\qquad$ $m = 1$ $\boxtimes$

Oss: se $m < n$ i valori reg. di f sono $N \setminus f(M)$
e $f^{-1}(y) = \emptyset$ $\forall y$ reg.

Oss: se $m = n$, $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_p\}$, con
segni $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ se M, N orientate.

Def: se $M^{(m)}$ è varietà a bordo e $N^{(n)}$ è chiusa
e $f : M \to N$ è C^∞ diciamo che
•) $x \in M$ è regolare se : per $x \in M \setminus \partial M$, df_x surg.
per $x \in \partial M$, $df_x|_{T_x \partial M}$ surg.



•) $y \in N$ reg. se $f^{-1}(y)$ contiene solo val. regolari.

Prop: se $f: M^{(m)} \longrightarrow N^{(n)}$ con $\partial M \neq \emptyset$, $\partial N = \emptyset$ e y è val. reg. di f allora $f^{-1}(y)$ è sottovarietà con bordo di M, canonicamente orientata se M e N sono orientate e $\partial(f^{-1}(y)) = (f|_{\partial M})^{-1}(y)$ in modo orientato:

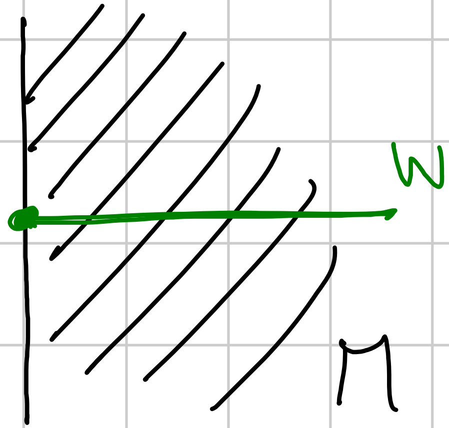
$f^{-1}(y)$ orientata $\Longrightarrow$ $\partial(f^{-1}(y))$ orientato via ONF
outer normal first

∂M orientato via ONF $\Longrightarrow$ $(f|_{\partial M})^{-1}(y)$ orientato via Prop. prec.

(Dimo per esercizio:

$W^{(p)} \subset M^{(m)}$ sottovar con bordo se loc.

$$(M, W) \text{ è diffeo a } \left(\mathbb{R}^{m-1} \times [0,\infty),\ \mathbb{R}^{p} \times 0^{m-p-1} \times [0,\infty)\right)$$



)

Lemma di Sard: se $f: M^{(m)} \longrightarrow N^{(n)}$ è C^∞ l'insieme dei valori critici di f è magro (in particolare ha misura di Lebesgue nulla)
$\Longrightarrow$ ci sono sempre valori regolari.

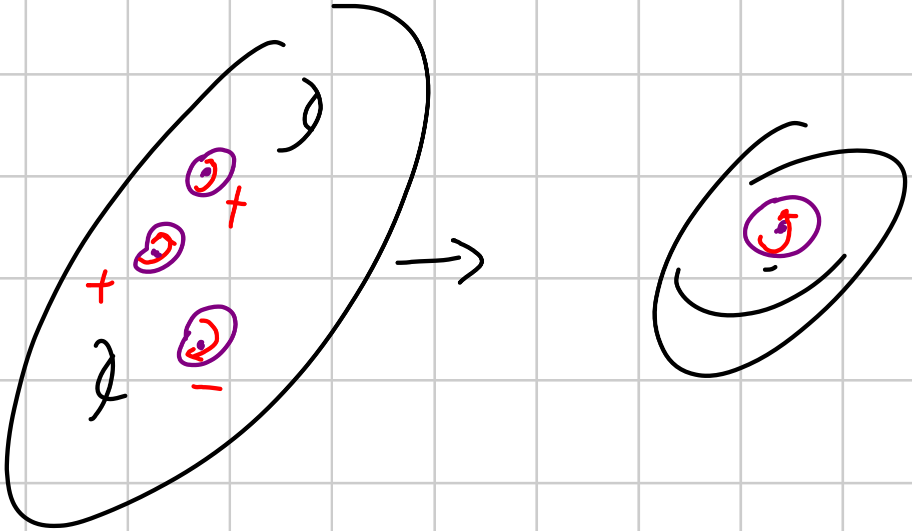
Def: se $M^{(n)}, N^{(n)}$ sono chiuse e orientate
scelto $y \in N$ val. reg. se $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_p\}$
con segni $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$
chiamo $\deg(f, y) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_p$.

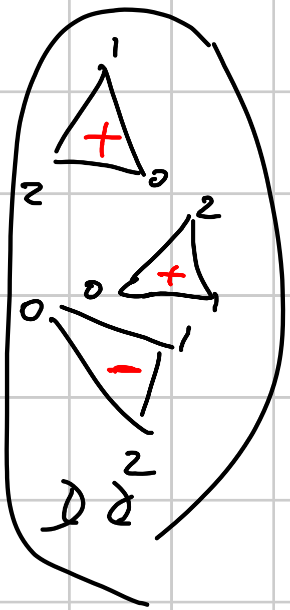
Teo: $\deg(f,y)$ non dipende da y

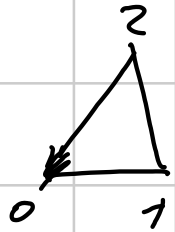
$\Longrightarrow \deg(f)$ è ben def;

inoltre $f_0 \simeq f_1 \Longrightarrow \deg(f_0) = \deg(f_1)$.

Oss: il calcolo di $\deg(f,y)$ è esattamente la versione liscia del calcolo locale del grado PL:



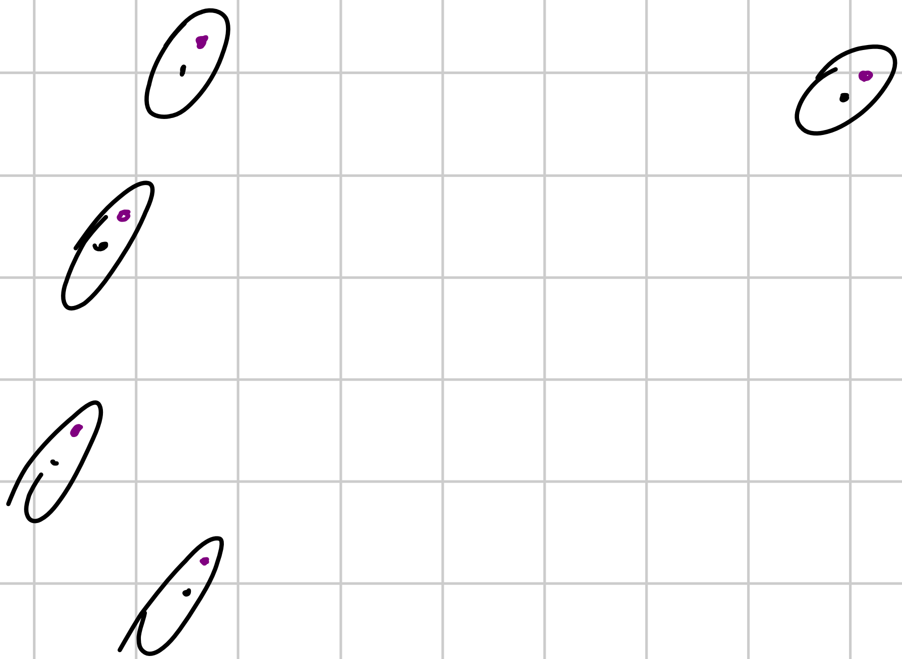




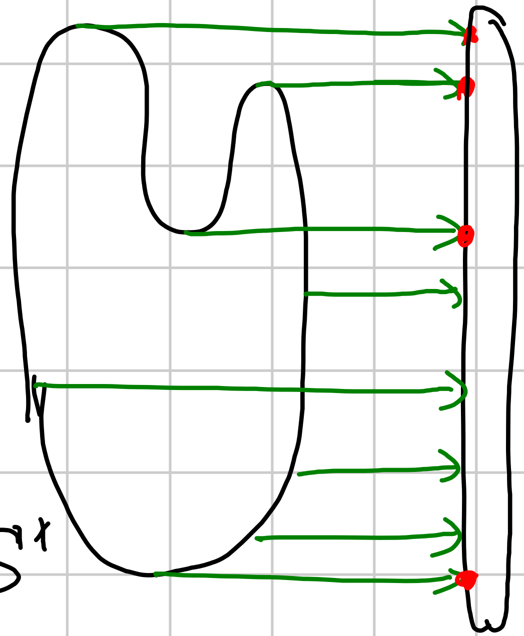
Fatto: dep(f,g) è indip. da y.

Oss: 1. L'insieme dei valori reg. è aperto in N

2. $\deg(f, y)$ è loc. costante sui val. reg.



Non basta: i vol. rep. possono essere sconnessi

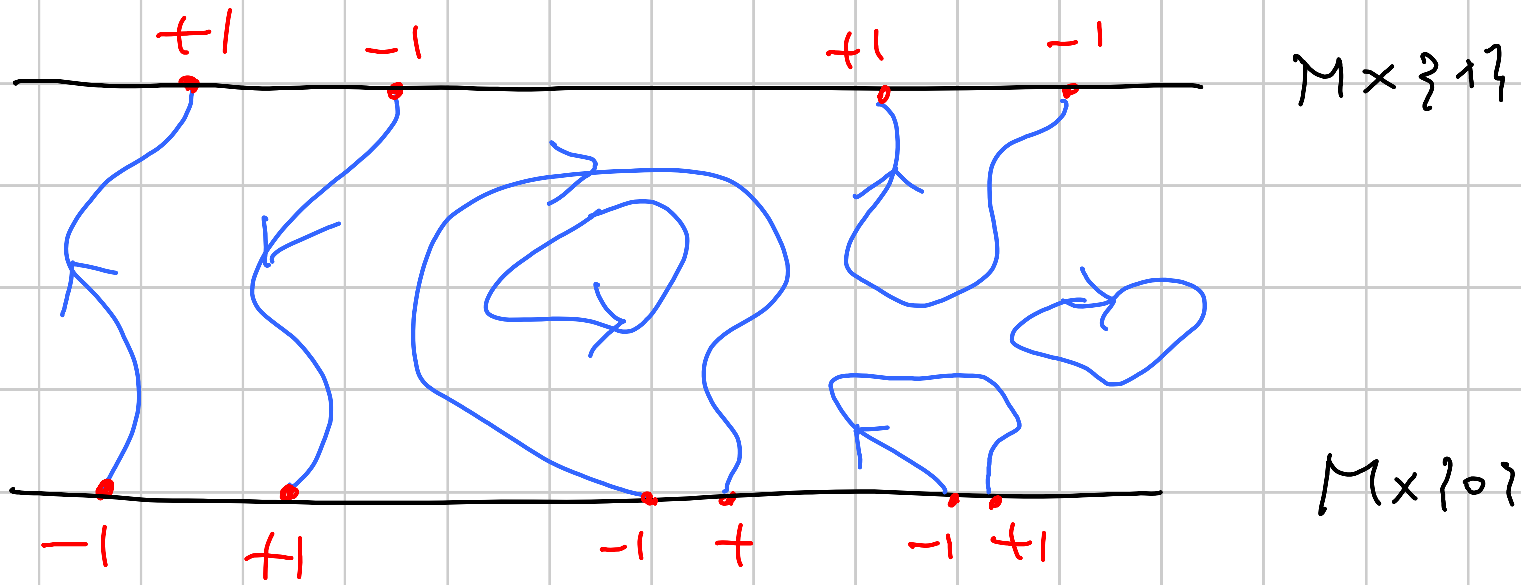


Dimo (Teo): I passo:

$f_0, f_1 : M \to N$ sono omotope e y è reg. per entrambe allora $\deg(f_0, y) = \deg(f_1, y)$ —

Posso supporre che l'omotopia $F : M \times [0,1] \to N$ ($F(\cdot, j) = f_j \quad j = 0,1$) sia C^∞ e posso supporre che y sia reg per F (uso anche la locale costanza) —

Ora $F^{-1}(y)$ è una 1-sottovar. orientata a bordo di $M \times [0,1]$



So che $\partial F^{-1}(y)$ è orientato come $\left(F|_{\partial M \times [0,1]}\right)^{-1}(y)$

$$F|_{\partial M \times [0,1]} = f_0|_{M \times \{0\}} \sqcup f_1|_{M \times \{1\}}$$

$$f_0|_{M \times \{0\}} = -f_0, \qquad f_1|_{M \times \{1\}} = f_1$$

$\Rightarrow \deg(f_1) =$ somma dei segni che vedo su $M \times \{1\}$

$\deg(f_0) = -$(somma dei segni che vedo su $M \times \{0\}$)

- le circonf. non contribuiscono
- gli archi con entrambi estremi sopra o sotto danno contributo 0
- gli archi con estremi uno sopra e uno sotto danno lo stesso contributo.

II Passo: se $y_0, y_1 \in N$ connessa allora esiste un automorfismo h di N

isotopo all'identità t.c. $h(y_0) = y_1$.

Isotopo: $\exists H : N \times [0,1] \xrightarrow{\cong} N \times [0,1]$

$$(y, t) \longmapsto (h_t(y), t)$$

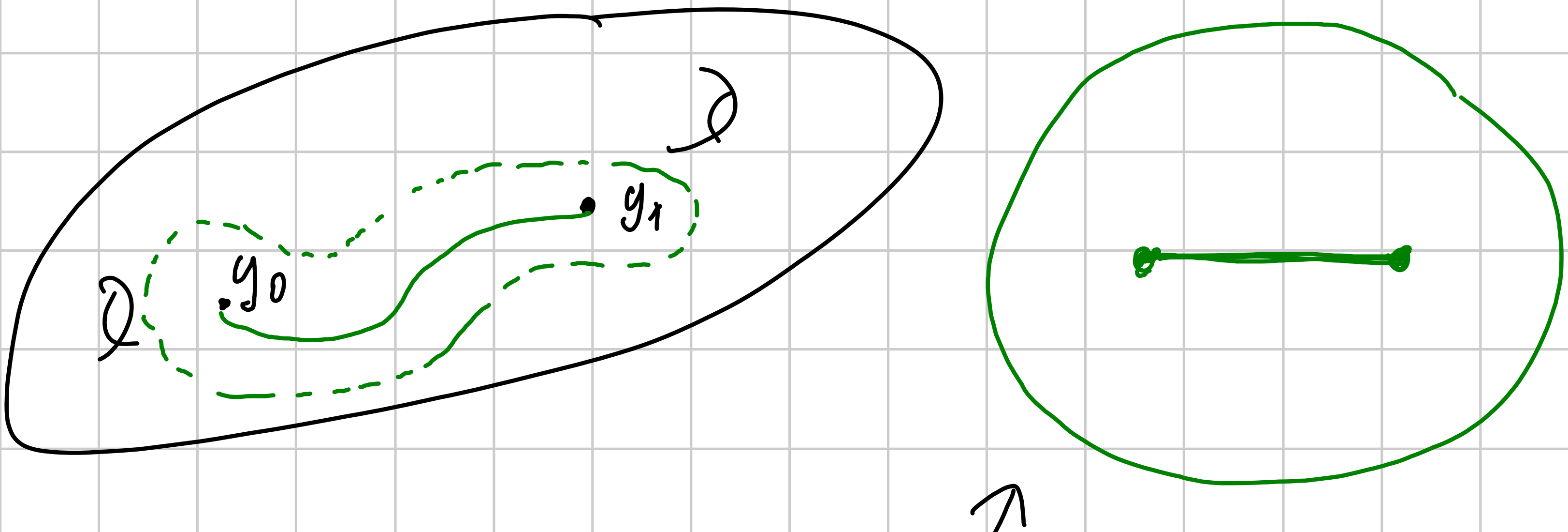
con $h_0 = id$, $h_1 = h$.

Infatti: posso unire y_0 e y_1 con un arco α liscio semplice e prendere un intorno U di α con $U \cong 2 \cdot D^n$

$\alpha \leftrightarrow [-1,1] \times 0^{n-1}$

$y_0 = (-1, 0 \ldots 0)$

$y_1 = (+1\ 0, \ldots, 0)$



basta farlo qui con una fam di diffeo che sono id su un intorno di ∂D^n.

Conclusione: Siamo y_0 e y_1 val. reg. di f.
Prendo h come nel passo 2

$$\Longrightarrow \deg(f, y_1) = \deg(h \circ f, y_1)$$

Passo I:
$h \circ f \simeq f$

$$= \deg(h \circ f, h(y_0))$$

$$= \deg(f, y_0). \qquad \blacksquare$$

Applicazioni della nozione di grado.

Teo: $f_0, f_1 : S^1 \to S^1$ sono omotope
$\iff$ hanno lo stesso grado.

Dim: $\Rightarrow$ noto; $\Leftarrow$:

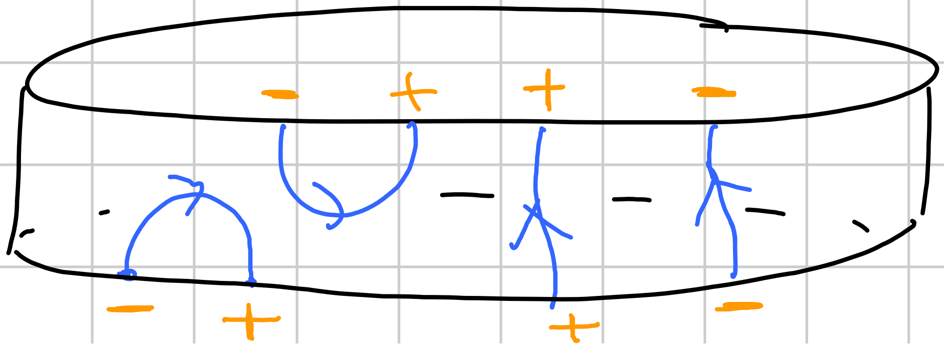
sia y val. reg. per f_0 e f_1, dunque

$$f_j^{-1}(y) = \{ \underbrace{P_1^{(j)}, \dots, P_{p_j}^{(j)}}_{\text{pos}}, \underbrace{N_1^{(j)}, \dots, N_{n_j}^{(j)}}_{\text{neg}} \}$$

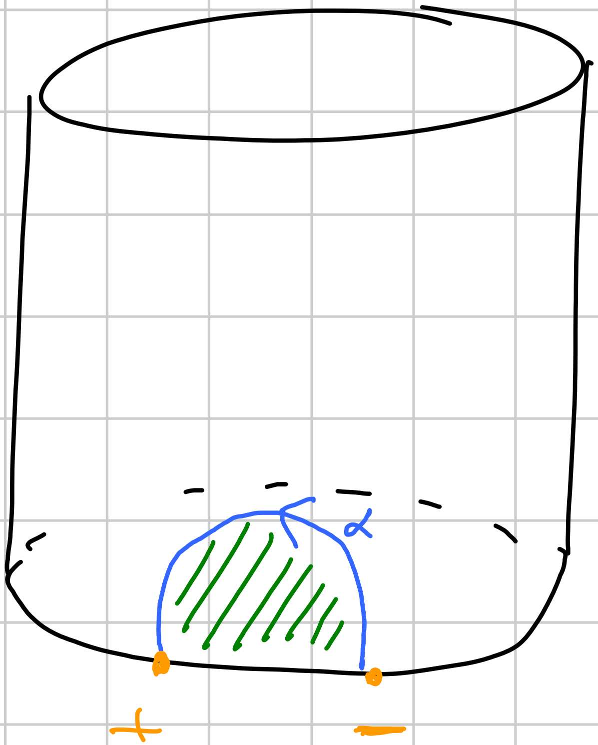
con $p_0 - m_0 = p_1 - m_1$. Affermo che esistono archi disgiunti orientati $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ in $S^1 \times [0,1]$ $(q = (p_0 + m_0 + p_1 + m_1)/2)$ con

$\partial \alpha_i$ è del tipo $P_*^{(0)} - N_*^{(0)}$, $P_*^{(1)} - N_*^{(1)}$, $P_*^{(1)} - P_*^{(0)}$, $N_*^{(1)} - N_*^{(0)}$

cioè mi vanno bene:



Infatti se $p_0 \cdot n_0 > 0$ posso trovare un $I_*^{(0)}$ e un $N_*^{(0)}$ consecutivi



procedo ignorando

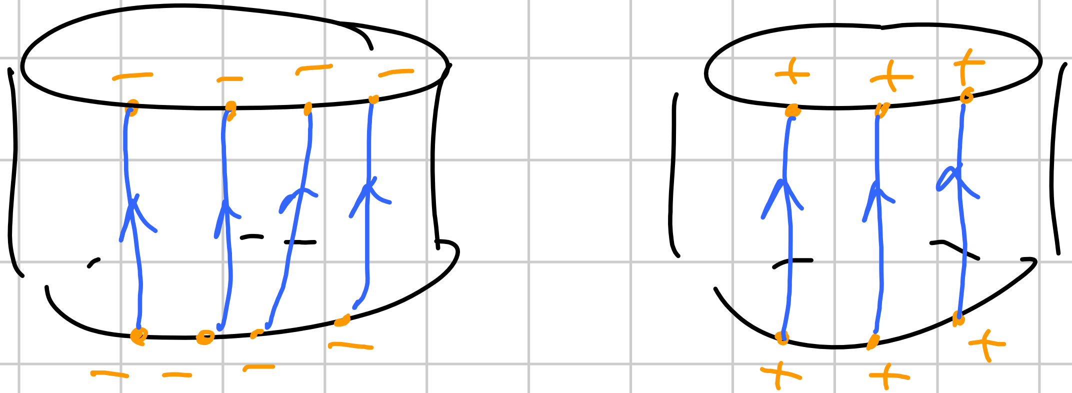
Analogamente se $p_1 \cdot m_1 > 0$; mi riconduco al caso $p_0 \cdot m_0 = p_1 \cdot m_1 = 0$ e

$$p_0 - m_0 = p_1 - m_1$$

dunque ho o $p_0 = p_1 = 0$ o $m_0 = m_1 = 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$m_0 = m_1 \qquad\qquad p_0 = p_1$$



Se $\deg(f_0) = \deg(f_1)$ è $\neq 0$ ho almeno

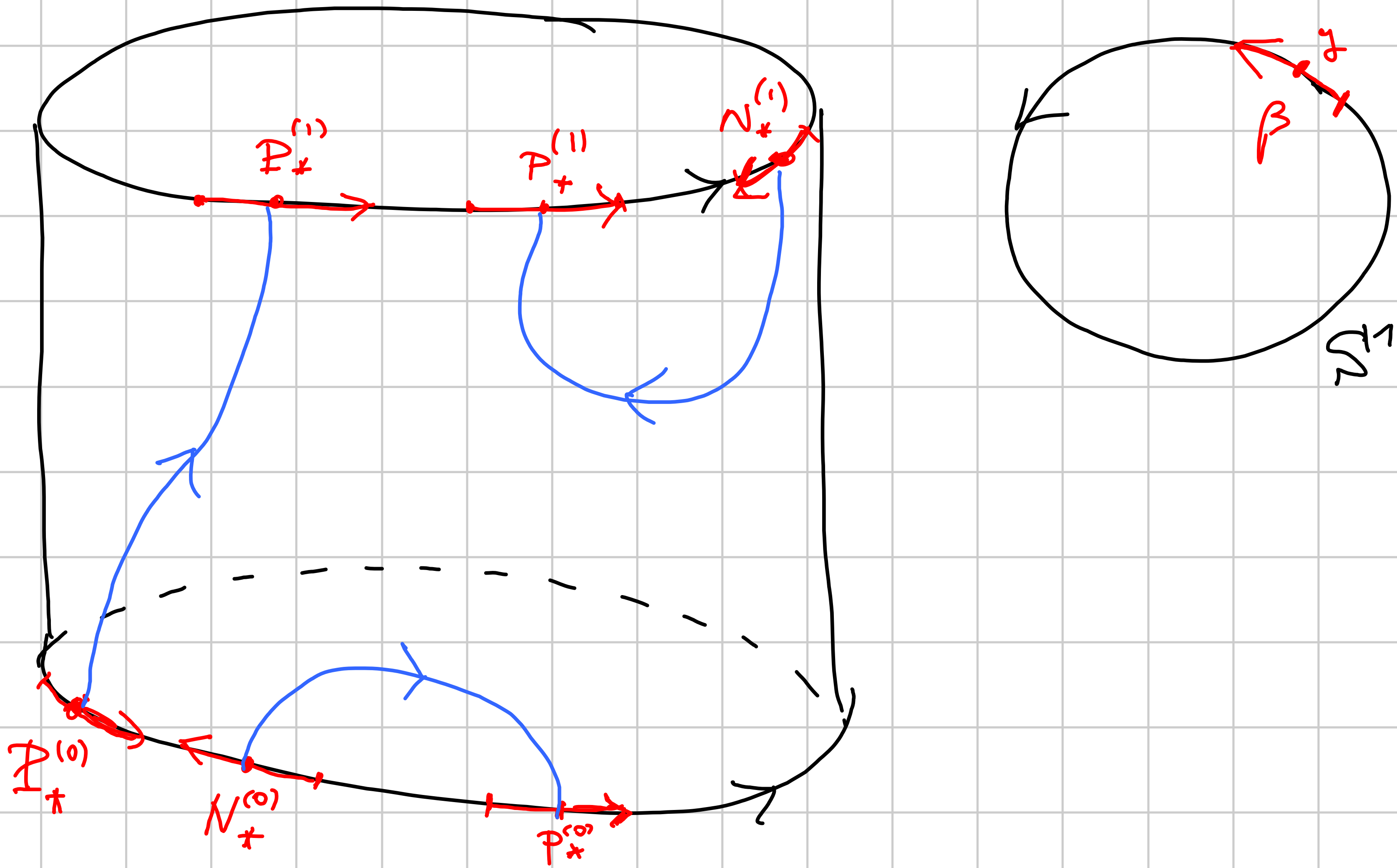
un arco che unisce $S^1 \times \{0\}$ con $S^1 \times \{1\}$:

scelgo β un arco in S^1 con centro in y t.c

$f^{-1}(\beta)$ sia unione di archi centrati nei

$P_*^{(j)}$, $N_*^{(j)}$ su cui la f è un diffeomorf.

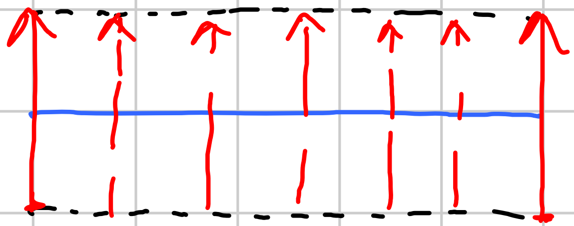
con β



$P_*^{(1)}$
$P_*^{(1)}$
$N_*^{(1)}$
$P_*^{(0)}$
$N_*^{(0)}$
$P_*^{(0)}$
y
β
S^1

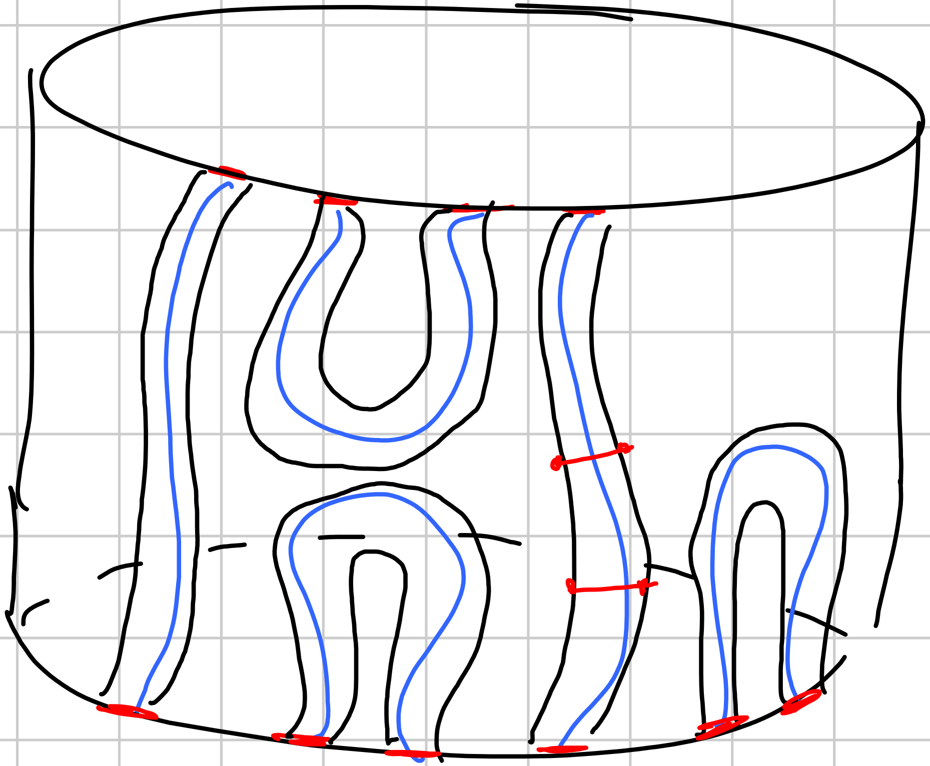
Scopo: provare che $f_0 \simeq f_1$ estendendo $f_0 \sqcup f_1$ a $S^1 \times [0,1]$.

Comincio estendendo a "rettangoli" che hanno come cuore uno degli α_i e come lati opposti due degli $f_{0,1}^{-1}(\beta)$:



estendo in modo che abbia valore β su tutti i segmenti paralleli ai lati opposti $f_{0,1}^{-1}(\beta)$.

Resta: estendere F a una dischi a valori nell'intervallo $S^1 \setminus \beta$: unione di



F già def su $S^1 \times \{0,1\}$ + rettangoli.

Complementare è unione di dischi sul cui bordo F ha val. in $S^1 \setminus \bar{\beta}$

Estensione: scelgo a caso valore al centro e poi estendo radialmente _

Esercizio: adattare al caso $\deg(f_0) = \deg(f_1) = 0$ _