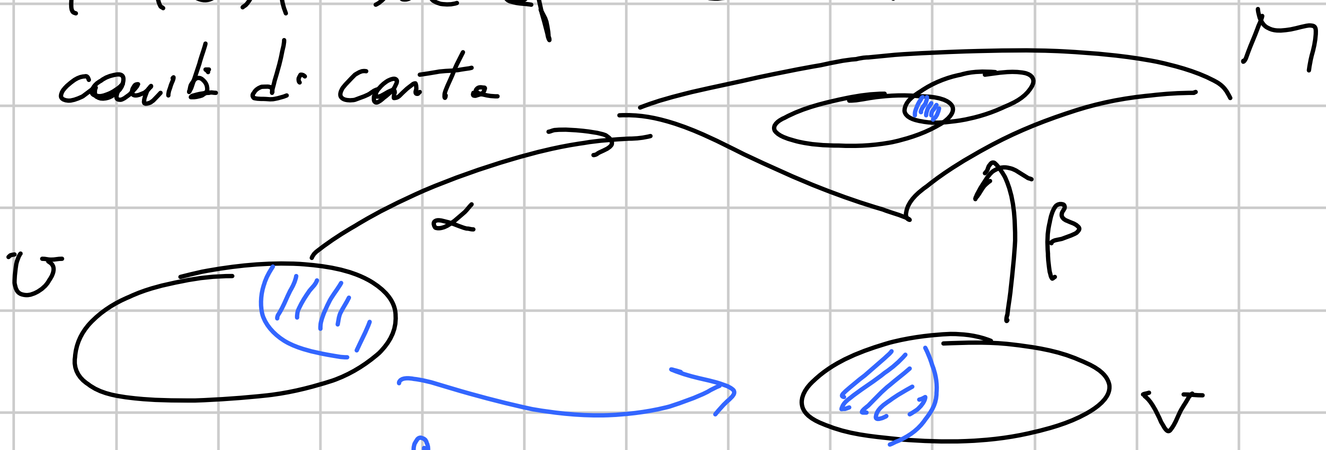
ETA 21/10/14

n-Varietà

TOP : $\underline{M}$ sp. top. (paracpt / per noi T_2 cpt)
loc. omeo a $\mathbb{R}^n$

DIFF : M sp top paracpt con un atlante
differenziabile $\{(U, \alpha)\}$ t.c.

- $\alpha : U \to M$ omeo con aperto di M, $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto
- $\{\alpha(U)\}$ ric aperto di M
- cambi di carta



$$g_{\alpha\beta} \doteq \beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(\alpha(U) \cap \beta(V)) \to \beta^{-1}(\alpha(U) \cap \beta(V))$$

devono essere C^∞

- atlante massimale

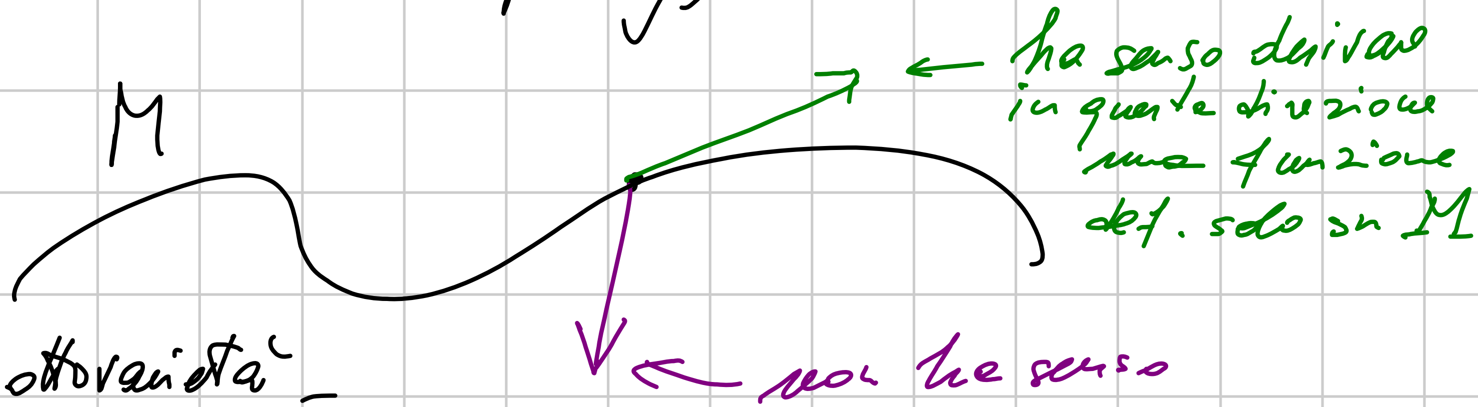
Def: sottovarietà di $\mathbb{R}^k$ è una n-varietà M come sopra in cui ogni $\alpha : U \to M$ ha ovunque rango n.

Oss (esercizio usando invertibilità loc): $M \subset \mathbb{R}^k$ sottovarietà $\Longleftrightarrow$ localmente grafico di
$\gamma : \underset{\substack{\cap \text{ aperto} \\ \mathbb{R}^n}}{W} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ di classe C^∞.

Oss: $M \subset \mathbb{R}^k$ m-sottovar. $x \in M$ posso definire $T_x M$ sp. tang. a M in x come

$$\mathrm{Im}\left(d\alpha\big|_{\alpha^{-1}(x)}\right) \quad \forall \text{ carta } \alpha : U \to M \text{ con } x \in \alpha(U).$$

Versione astratta dello sp. tang.: idea:



per sottovarietà.

Def: M, N varietà, $f: M \to N$ è differenziabile se lo è letta localmente nelle carte.

Def: $T_x M = \{ v : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineari :
$v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot v(g) \}$.

Prop: se (U, α) è una carta e $x \in \alpha(U)$ allora $T_x M$ ha come base

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\cdot \circ \alpha) \quad j = 1, \ldots, m.$$

(Basta vederlo in $\mathbb{R}^n$: v derivaz. in 0 su $\mathbb{R}^n$

a meno di sostituire v con $v - \sum_j v(x_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_0$

posso supporre $v(x_j) = 0 \ \forall j$

nel qual caso devo provare che $v = 0$.

Immediato $v\big|_{\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]} \equiv 0 \dots$).

<u>Def</u>: $\phi : M \to N$ è C^∞ diciamo differenziale

$$d\phi_x : T_x M \to T_{\phi(x)} N$$

$$(d\phi_x(v))(g) = v(g \circ \phi).$$

Oss: per sottovarietà è la solita definizione _

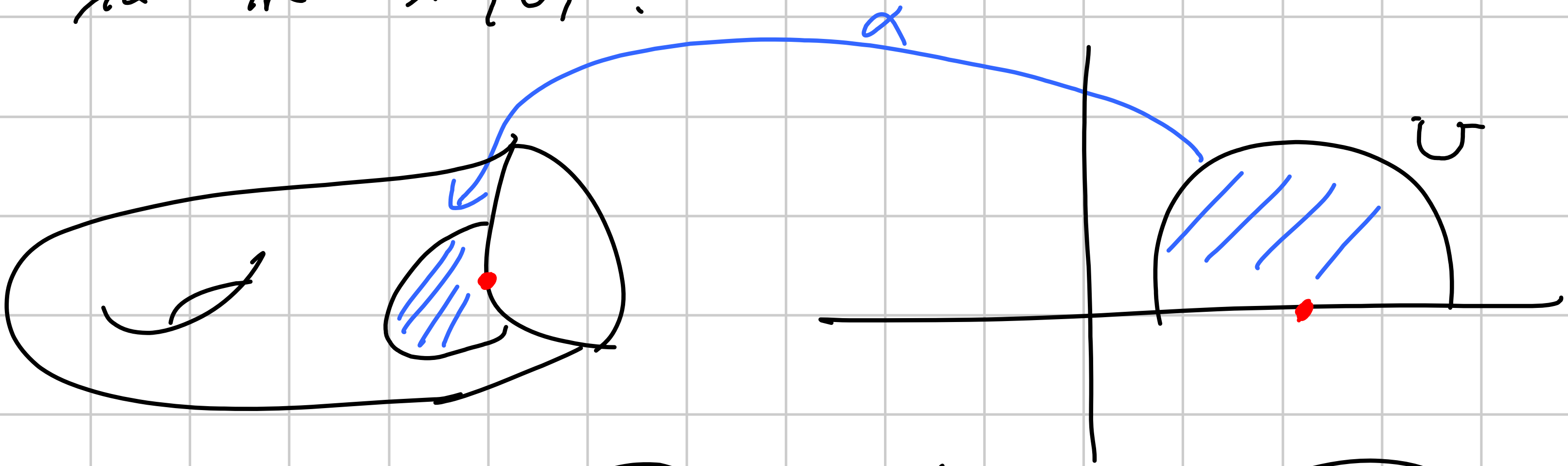
Def: n-varietà con bordo

TOP: spazio loc. omeo a $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,+\infty)$

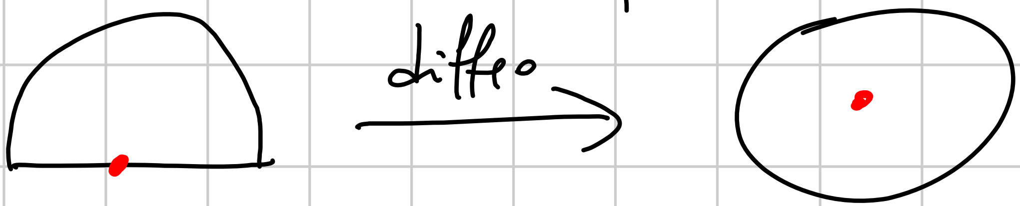
DIFF: atlante $\{(U,\alpha)\}$ con U aperto di $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,+\infty)$ e cambi di carte C^∞

($A, B \subset \mathbb{R}^n$ anche non aperti, dico $g: A \to B$ C^∞ se è localmente restrizione di mappe C^∞ su aperti)

Oss: nel caso DIFF posso definire ∂M = quei punti che in ogni carta hanno preimmagine in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$:



Ben def: $\nexists$

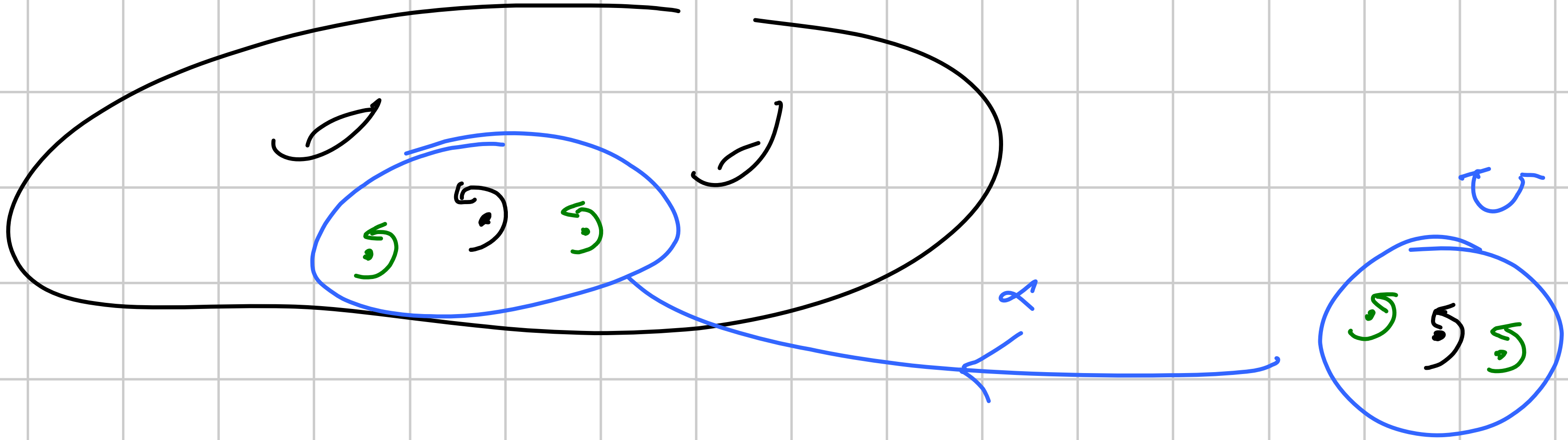


Fatto : $\nexists$ nemmeno nel caso [VEDREMO]

$\Longrightarrow \partial M$ ben def anche per M TOP.

Def: M DIFF si dice orientata se valgono i seguenti fatti equivalenti:

1) Ogni $T_x M$ è orientato in modo loc. costante (cioè $\forall x \; \exists (U, \alpha)$ t.c. $x \in \alpha(U)$ e ogni $d\alpha_y^{-1}$ (base positiva di $T_{\alpha(y)} M$) = base positiva di $\mathbb{R}^n$



2) E' dato un atlante con ogni $\det(dg_{\alpha\beta}) > 0$ (massimale).

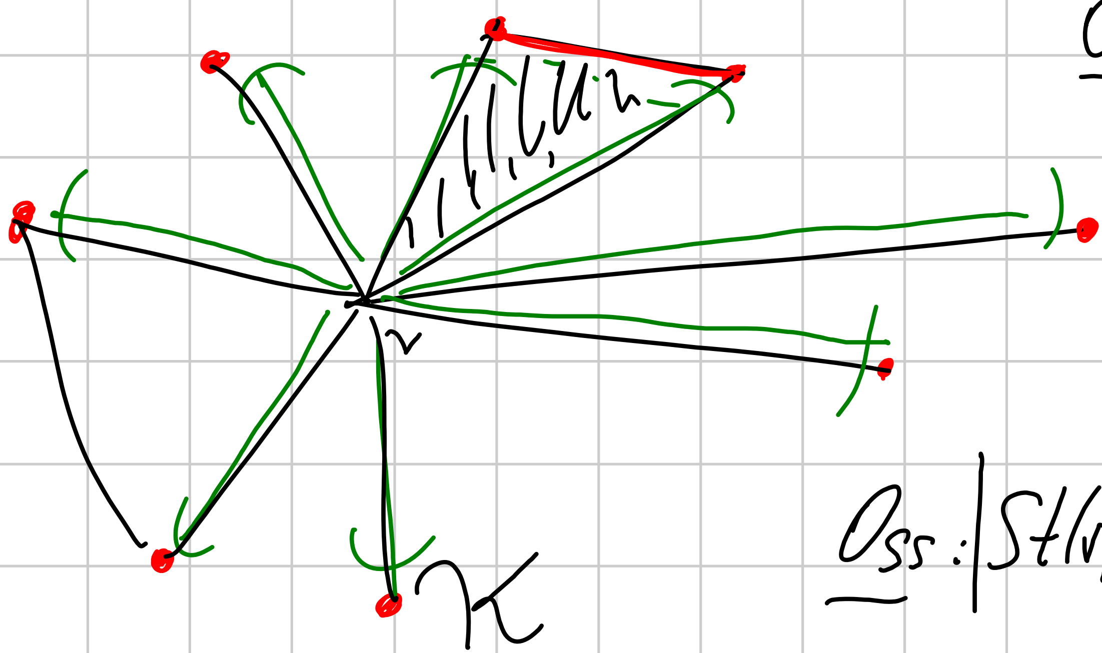
Corrispondenza : $2 \longrightarrow 1$ orientare $T_x M$ come

$\mathbb{R}^n$ via $d\alpha_{\alpha^{-1}(x)}$

$1 \rightsquigarrow 2$ usare carte come nella def. e passare ad atlante massimale.

<u>Varietà PL</u>: Fisso K complesso simpliciale in $\mathbb{R}^N$.

$$St(v, K) = \{\sigma \in K : v \in \sigma\}$$
$$Lk(v, K) = \{\sigma \in K : v \notin \sigma, \exists \tau \in K \text{ t.c. } \tau \supset \sigma \cup \{v\}\}$$



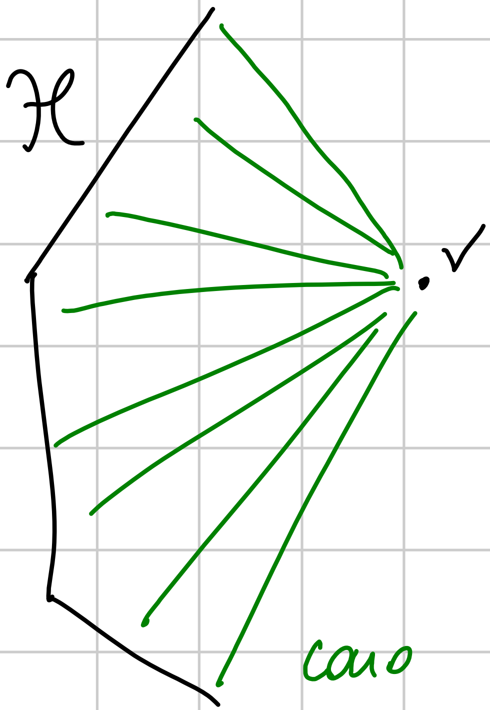
Oss: è sottocompl.

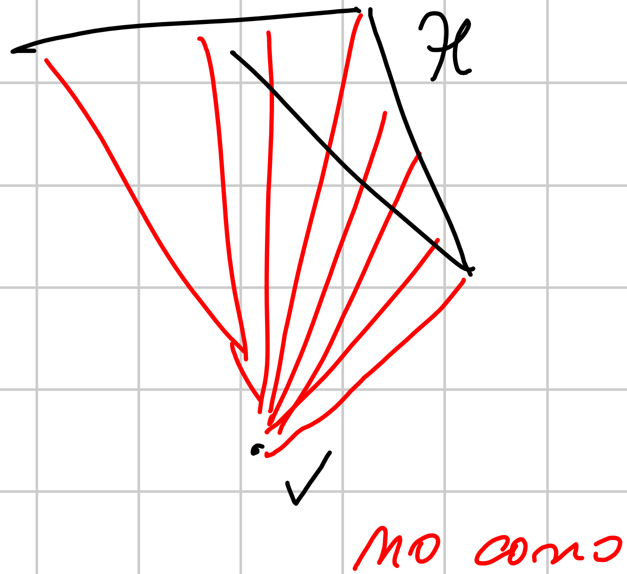
Oss: $|St(v,K)| = OSt(v,K) \sqcup |Lk(v,K)|$

Lem: $|St(v,K)|$ = cono di vertice v e base $|Lk(v,K)|$

$= \{ t \cdot v + (1-t) \cdot y \; : \; y \in \uparrow, \; t \in [0,1] \}$

dove l'espressione è sempre unica
tranne che per v.

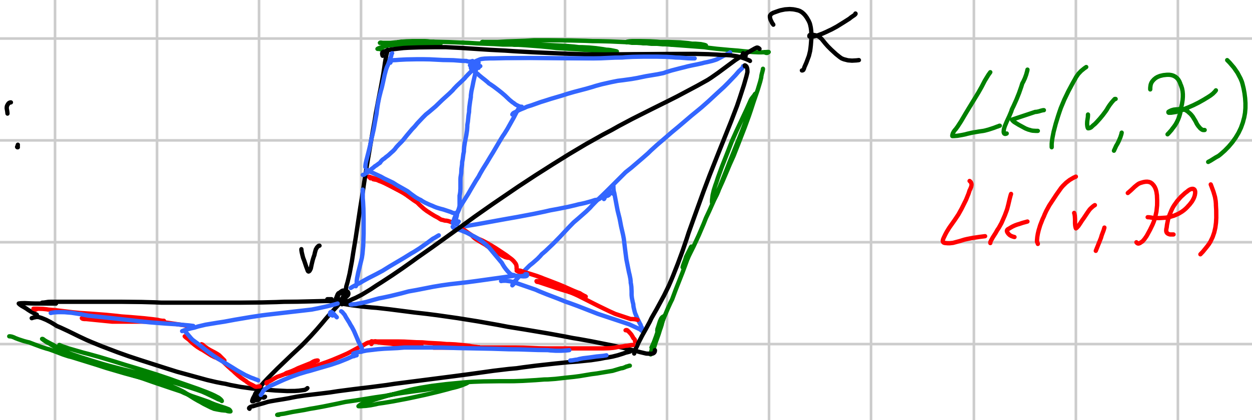




Def: PL-omeomorfismo $f : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$:
un omeo che è simpliciale rispetto a qualche suddivisione di $\mathcal{K}$ e $\mathcal{H}$.

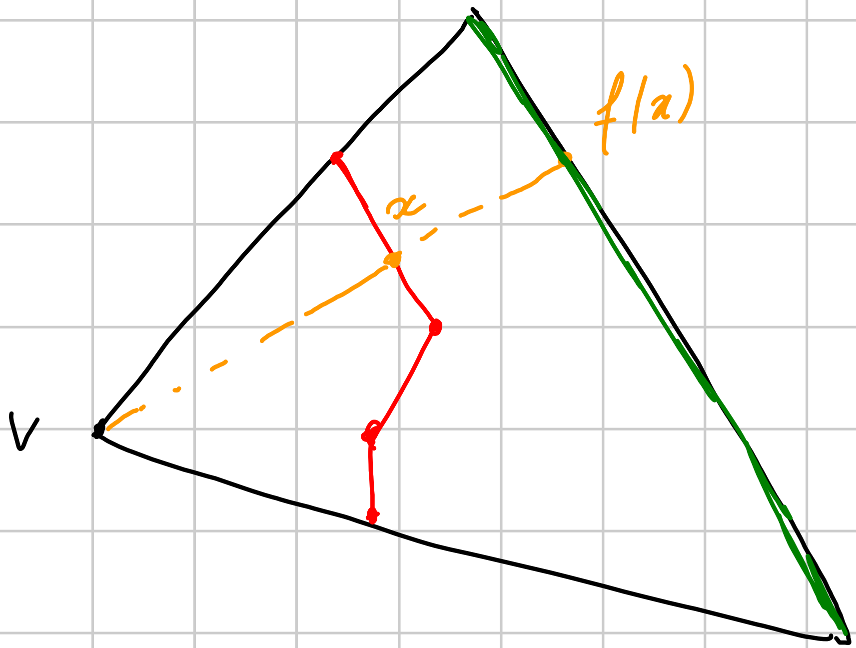
Lem: $\mathcal{H}$ suddivisione di $\mathcal{K}$ allora per $v \in \mathcal{K}^{[0]}$
$$Lk(v, \mathcal{H}) \cong_{PL} Lk(v, \mathcal{K}).$$

"Dim (esc)":



$f : |Lk(v, \mathcal{H})| \longrightarrow |Lk(v, K)|$

mappa radiale è omeo, ma non PL

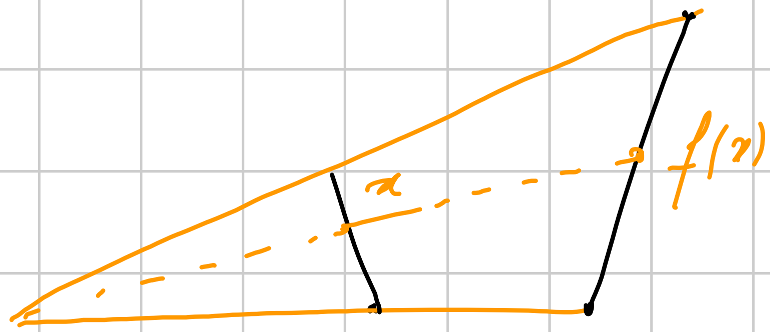


Rimedio: si definisce

$g_0 : Lk(v, \mathcal{H})^{[0]} \longrightarrow Lk(v, K)$

radialmente; si suddivide K in modo che contenga $\mathrm{Im}(g_0)$;

si estende simplicialmente.



Non rispetta conv. comb.

Cor: $Lk(x, K)$ è ben def a meno di omeo PL per ogni $x \in |K|$.

Infatti se definisco $Lk(x, K)$ come $Lk(x, L)$ dove L suddivide K e $x \in L^{(0)}$ ho una buona def:

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ suddivisioni con $x \in \mathcal{L}_1^{[0]} \cap \mathcal{L}_1^{[0]}$

ho una suddivisione comune $\mathcal{H}$

$$\underset{\text{Lem}}{\Longrightarrow} \quad Lk(x, \mathcal{H}) \begin{array}{l} \cong_{PL} Lk(x, \mathcal{L}_1) \\ \cong_{PL} Lk(x, \mathcal{L}_2) \end{array} \quad \_\_$$

Notazione: Δ_n n-simplesso standard

$= \mathrm{Conv}(e_0, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$\partial \Delta_n =$ le facce di codim > 0

Def: K è una varietà PL (senza bordo) se valgono questi fatti equiv:

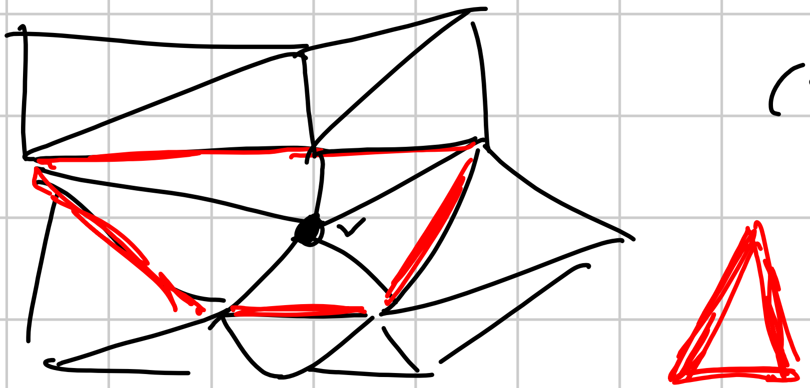
(1) $Lk(v) \cong_{PL} \partial\Delta_n \quad \forall v \in K^{(0)}$

(2) $Lk(x) \cong_{PL} \partial\Delta_n \quad \forall x \in |K|$

(3) $St(v) \cong_{PL} \Delta_n$ con $v \leftrightarrow w \in int(\Delta_n)$ $\forall v \in K^{(0)}$

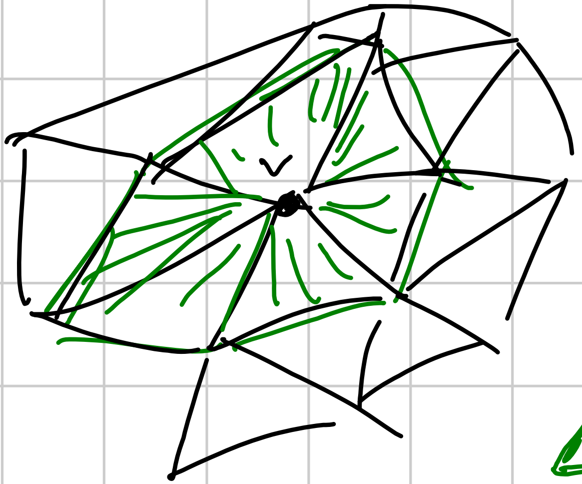
(4) $St(x) \cong_{PL} \Delta_n$ con $x \leftrightarrow y \in int(\Delta_n)$ $\forall x \in |K|$

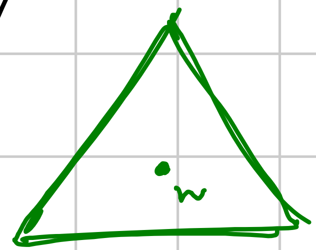
(1)



(2) = (1) accade $\forall x$ dopo suddivisione

(3)





(4) la (3) vale $\forall x$ dopo suddivisione _

<u>Equiv</u>.:

$$\begin{tikzcd} & (4) \arrow[dl, Rightarrow] & \\ (2) & & (3) \arrow[ul, Rightarrow, "\times"'] \end{tikzcd}$$

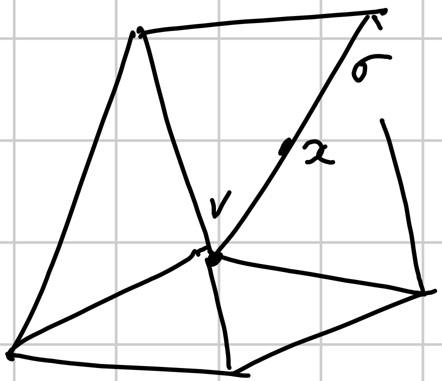
poiché $Lk(y, \Delta_n) \cong \partial\Delta_n$ per $y \in \mathrm{int}(\Delta_n)$

||

ovvio $\nearrow$ $\Delta_{(1)}$ $=$ poiché cono con base $\partial\Delta_n$ è Δ_n

$*$: sia $x \in |K|$; prendo $\sigma \in K$ t.c. $x \in \mathrm{int}(\sigma)$ e $v \in \sigma^{[0]}$ — Ora $St(v,K) \cong_{PL} \Delta_n$

con $v \longleftrightarrow w \in \mathrm{int}(\Delta_n)$



$\Longrightarrow |St(x,H)| \subset |St(v,K)|$

$\forall H$ suddiv. di K

e $x \longleftrightarrow y \in \mathrm{int}(\Delta_n)$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ \mathrm{St}(v, K) \end{array}$$

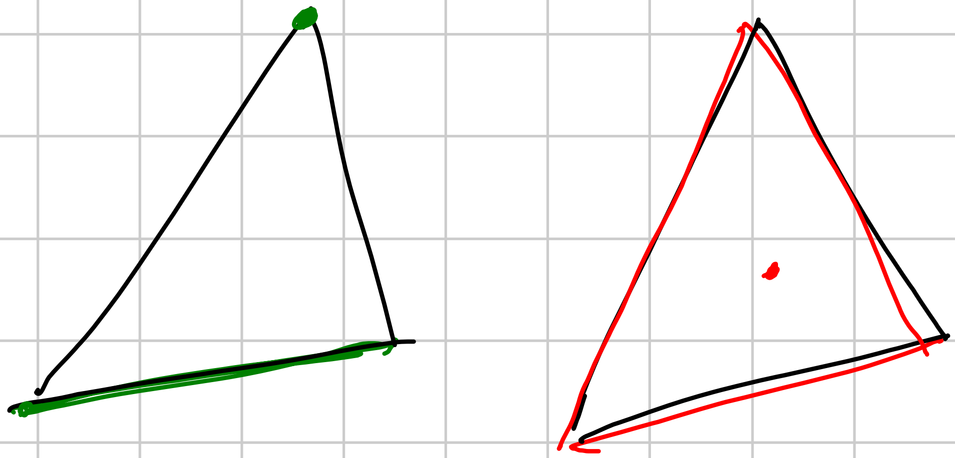
quindi si conclude provando che

$$\mathrm{St}(y, \text{una suddiv. di } \Delta_n) \cong_{PL} \Delta_n \qquad \text{se } y \in \mathrm{int}(\Delta_n)$$

chiaro: non dipende dalla suddiv quindi basta farlo per la suddivisione "cono da y su $\partial \Delta_n$" — $\blacksquare$

Versione a bordo:

Def: K c.s. è n-varietà PL a bordo se ...



(1) $\forall v \in K^{[0]}$ $Lk(v) \cong_{PL} \partial \Delta_m$ o Δ_{m-1}

(2) $\forall x \in |K|$ $Lk(x) \cong_{PL} \partial \Delta_m$ o Δ_{m-1}

(3) $\forall v \in K^{[0]}$ $St(v) \cong_{PL} \Delta_m$

(4) $\forall x \in |K|$ $St(x) \cong_{PL} \Delta_m$.

(Dimo: esercizio simile e sopra.)

$(1)/(2)$ $Lk(x) \cong \Delta_{m-1}$

$x \in \partial |K| \Longleftrightarrow$

$(3)/(4)$ nell'omeo $St(v) \longrightarrow \Delta_n$

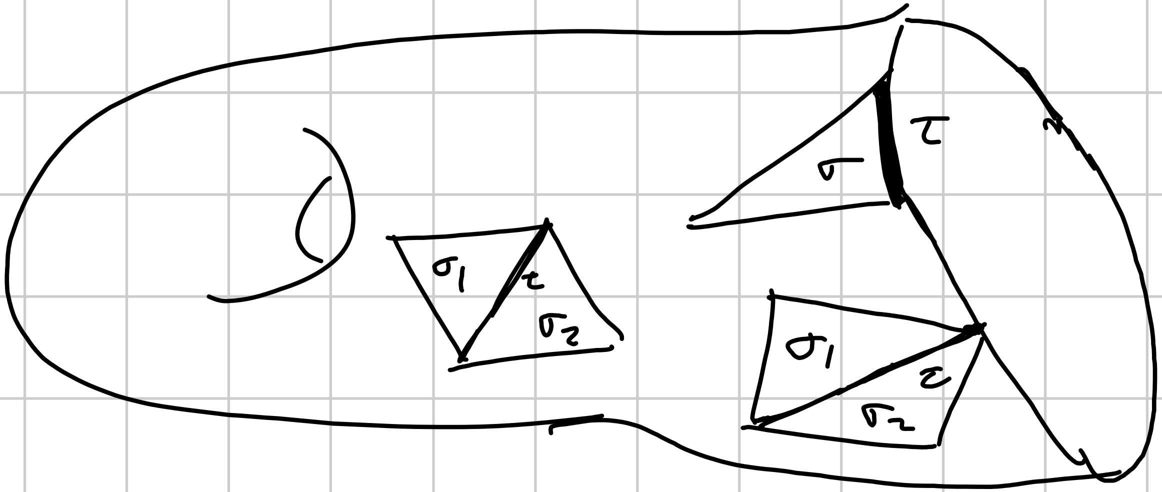
$x \longleftrightarrow y \in \partial \Delta_m$.

Lem: sia K una n-varietà PL con ∂ e sia $\tau \in K^{[n-1]}$.

Allora si danno due casi:

•) $\mathrm{int}(\tau) \subset |K| \setminus \partial |K|$ e $\#\{\sigma \in K^{[n]} : \sigma \supset \tau\} = 2$

••) $\tau \subset \partial |K|$ e $\#\{\sigma \in K^{[n]} : \sigma \supset \tau\} = 1$.



"Dim": prendo $x \in \mathrm{int}(\tau)$

$$x \in \begin{cases} \partial|K| \longrightarrow (\bullet\bullet) \\ |K| \setminus \partial|K| \longrightarrow (\bullet) \end{cases} \qquad \square$$

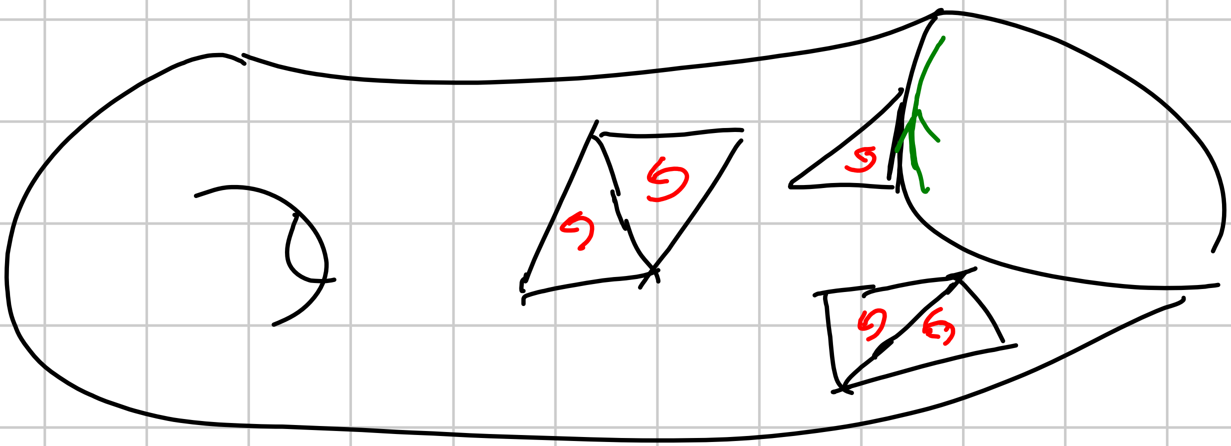
<u>Oss</u> (da fare prima): $\partial|K|$ è ben definito perché

$$H_{n-1}(\partial\Delta_n) \cong \mathbb{Z}$$ (visto per $n=2,3$; in generale: uguale)

mentre $$H_{n-1}(\Delta_{n-1}) = 0$$ (ovvio)

Def: una orientazione per una n-varietà PL X è una orientazione di $K^{[n]}$ t.c. $\forall \tau \in K^{[n-1]}$ come in $(\bullet)$ si ha $\varepsilon(\sigma_1, \tau) + \varepsilon(\sigma_2, \tau) = 0$ se

$$\{\sigma : \sigma \supset \tau\} = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$



Esercizio: provare che ∂K è in modo naturale una $(n-1)$-varietà orientata.

Teo: sia K una n-varietà connessa senza bordo. Allora $H_n(K) \simeq \mathbb{Z}$ se K è orientabile, $H_n(K) = 0$ se K non lo è.

Dim: Sia K orientabile; uso per la def di $H_n(K)$ tali orientazioni. Noto:

$$H_n(K) = Z_n(K) \quad \text{poiché } B_n(K) = 0$$

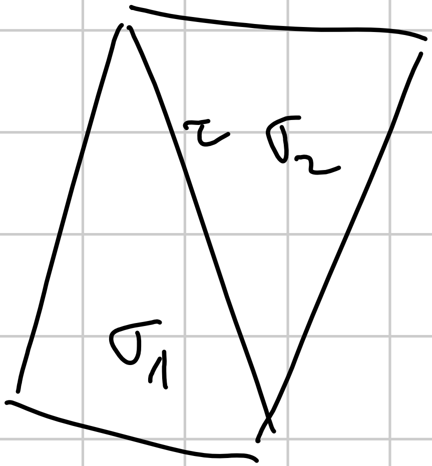
$(K^{[n+1]} = \emptyset)$.

Affermo che $Z_n(K) = \mathbb{Z} \cdot \sum_{\sigma \in K^{[n]}} \sigma$.

Ovviamente $\supseteq$:

$$\partial \left(\sum_{\sigma \in K^{[n]}} \sigma \right) = \sum_{\tau \in K^{[n-1]}} \left(\underbrace{\varepsilon(\sigma_1^{(\tau)}, \tau) + \varepsilon(\sigma_2^{(\tau)}, \tau)}_{0} \right)$$

Viceversa: se $z = \sum_{\sigma \in K^{[n]}} n(\sigma) \cdot \sigma \in Z_n(K)$ allora



$\Longrightarrow m(\sigma_1) = m(\sigma_2)$

perché il coeff di τ in ∂z

$= m(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_1,\tau) +$

$m(\sigma_2)\cdot\varepsilon(\sigma_2,\tau)$

Per concludere:

$\Longrightarrow m(\sigma') = m(\sigma)$ _