# ETA 18/11/14

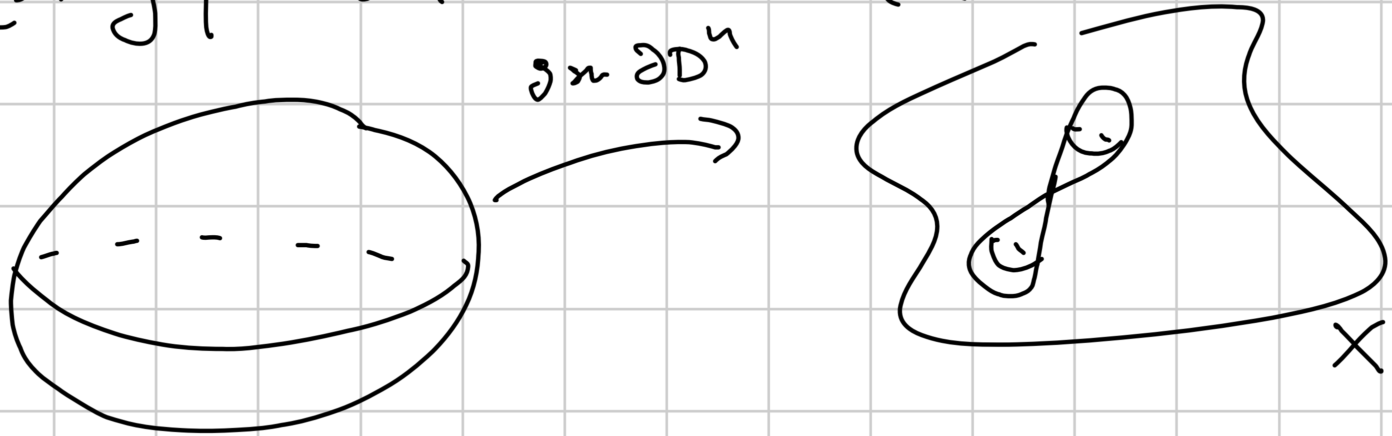
## CW-complessi

X spazio top.; dico che Y è ottenuto da X per attaccamento di una n-cella se è data $g: S^{n-1} \longrightarrow X$ continua e

$$Y = X \cup_g D^n := X \sqcup D^n \Big/ \begin{matrix} t \in D^n & x \sim t \text{ se } t \in S^{n-1} \\ x \in X & x = g(t) \end{matrix}$$

con topologia quoziente

<u>Oss</u>: g può non essere iniettiva -




<u>CW-complesso</u>: spazio $X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} X^{(n)}$ :

$X^{(0)}$ discreto

$X^{(n)}$ è ottenuto da $X^{(n-1)}$ per attaccamento di

$n$-celle lungo mappe $g_\alpha^{(n)} : S^{n-1} \longrightarrow X^{(n-1)}$

con $\alpha \in A_n$

(Notazione: se $Y = X \cup_g D^n$ con

$$g : S^{n-1} \longrightarrow X$$

pongo

$$f : D^n \longrightarrow Y$$
$$t \longmapsto [t]$$

cioè $f = g$ su $S^{n-1}$

$f$ è iniettiva su $B^n_-$ )

con topologia t.c. $\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ è ric.-fond. cioè

$$\{f_\alpha^{(n)}(D^n) : n \in \mathbb{N},\ \alpha \in A_n\} \text{ è ric.-fond.}$$

<u>Oss</u>: se $K$ è un compl. simpliciale (astratto o geometrico) allora $|K|$ ha una struttura

di CW-complesso dato

$\sigma \in K^{[n]}$, $|\sigma| \cong_{PL} D^n$

$$g_\sigma : \partial|\sigma| \hookrightarrow |K^{(n-1)}|$$
$$\begin{matrix} \| \wr \\ S^{n-1} \end{matrix}$$

<u>Oss</u>: se $K$ è un $(n-1)$-complesso simpliciale e attacco una cella lungo una $g : \partial\Delta_n \to K$

mappe PL $\Rightarrow |K| \cup_g \Delta_n$ ha una struttura di complesso simpliciale.

<u>Idea</u>: se $g$ fosse PL-omeo: ovvio.

Altrimenti: suddivido "molto" $\Delta_n$.

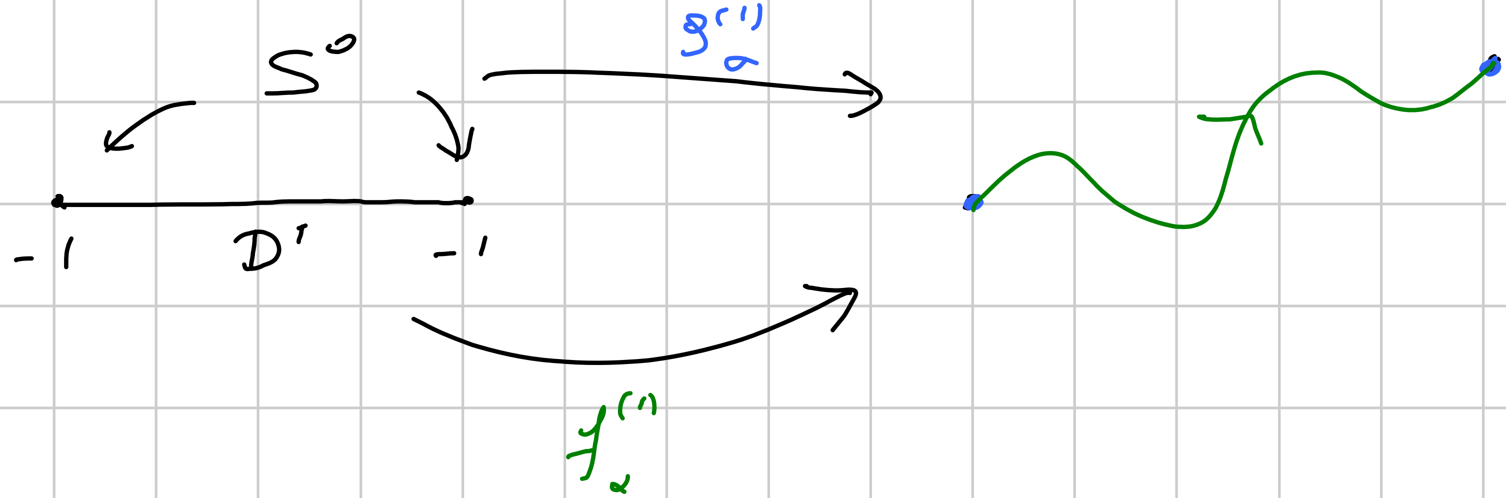
<u>Omologia di X</u> CW-complesso (cellulare).

$C_n(X) =$ gruppo ab. libero generato da $\{ g_\alpha^{(n)} : \alpha \in A_n \}$
(l'insieme delle mappe di incollamento delle n-celle a $X^{(n-1)}$) _

$$\partial_n g_\alpha^{(n)} = \sum_{\beta \in A_{n-1}} \underbrace{\varepsilon\left(g_\alpha^{(n)}, g_\beta^{(n-1)}\right)}_{\text{da definire}} \cdot g_\beta^{(n-1)} \text{ \_}$$

$n = 0$: $\quad \partial_0 g_\alpha^{(0)} = 0$

$n = 1$: $\quad \partial_1 g_\alpha^{(1)} = g_\alpha^{(1)}(+1) - g_\alpha^{(1)}(-1)$




$n \geq 2$ : fissiamo $\alpha \in A_n$, $\beta \in A_{n-1}$ e definiamo

$$\mathcal{E}\left(g^{(n)}_\alpha, g^{(n-1)}_\beta\right) -$$

$$Y^{(n-1)}_\beta = X^{(n-1)} \setminus f^{(n-1)}_\beta \big( \underbrace{B^{n-1}}_{= D^{n-1} \setminus S^{n-2}} \big)$$

e $\pi_\beta^{(n-1)} : X^{(n-1)} \longrightarrow X^{(n-1)} / \underbrace{Y_\beta^{(n-1)}}_{\text{collassato a un punto}}$

Ora:

$$\begin{tikzcd}
D^{n-1} \arrow[r, "f_\beta^{(n-1)}"] \arrow[d] & X^{(n-1)} \arrow[d, "\pi_\beta^{(n-1)}"] \\
D^{n-1}/S^{n-2} \arrow[r, "h_\beta^{(n-1)}"] & X^{(n-1)}/Y_\beta^{(n-1)}
\end{tikzcd}$$

$h_\beta^{(n-1)}$ è ovvio

inoltre ho

$$\begin{tikzcd}
D^{n-1} \arrow[rr, "x \mapsto \frac{x}{1-\|x\|}"] \arrow[d] & & \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\} \arrow[r, "\substack{\text{inversa proiez.} \\ \text{stereogr.}}"] & S^{n-1} \\
D^{n-1}/S^{n-2} \arrow[urr, "u^{(n-1)}"] & & &
\end{tikzcd}$$

$y \longmapsto z$

$\infty \longmapsto (0,1)$


$u^{(n-1)}$ omeo canonico.

Poniamo ora:

$$\varepsilon\left(g_\alpha^{(n)}, g_\beta^{(n-1)}\right) = \deg\left( S^{n-1} \xrightarrow{g_\alpha^{(n)}} X^{(n-1)} \xrightarrow{\pi_\beta^{(n-1)}} X^{(n-1)}/Y^{(n-1)} \xrightarrow{\left(h_\beta^{(n-1)}\right)^{-1}} D^{n-1}/S^{n-2} \xrightarrow{u^{(n-1)}} S^{n-1} \right)$$

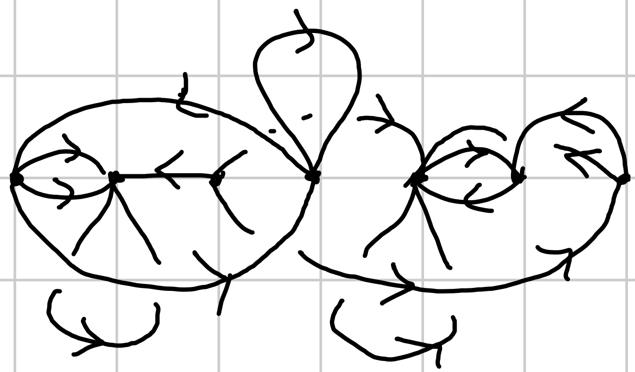
<u>Fatto</u>: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ (lo mostro per $n=2$ tra poco)

$\Longrightarrow$ ho $H_*^{CW}(X)$.

<u>Attenzione</u>: ho usato $\deg(S^{n-1} \to S^{n-1})$ che è definito tramite $H_*^{SIMPL}$.

$\partial_1 \circ \partial_2 = 0$ : $X^{(0)}$ = insieme discreto

$X^{(1)}$ :



(orientaz. da $f_\beta^{(1)} : [-1,1] \to X^{(1)}$)

grafo generalizzato (ammessi lati chiusi e più lati con estremi uguali) _

Diventa un grafo suddividendo ogni lato in tre lati _

$g_\alpha^{(2)} : S^1 \to X^{(1)}$ ; $\partial g_\alpha^{(2)}$ dipende da

$g_\alpha^{(2)}$ a meno di $\simeq$ $\Rightarrow$ posso supporre

$$g_\alpha^{(2)} = e_{i_0}^{\delta_0} \cdot e_{i_1}^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_{k-1}}^{\delta_{k-1}}$$

$(\ast)$ con $e_{i_j}$ lati di $X^{(1)}$ e secondo estremo di $e_{i_{j-1}}^{\delta_{j-1}}$ = primo estremo di $e_{i_j}^{\delta_j}$

Ora: $\partial_2 g_\alpha^{(2)} = \delta_0 \cdot e_{i_0} + \dots + \delta_{k-1} \cdot e_{i_{k-1}}$ (esercizio)

$\Rightarrow \partial_1 \partial_2 g_\alpha^{(2)} = 0$ per $(\ast)$ —

<u>Fatto</u>: per un complesso simpliciale visto come CW-complesso si ha:

$$\underbrace{\varepsilon(g_\sigma^{(n)}, g_\tau^{(n-1)})} = \underbrace{\varepsilon(\sigma, \tau)}$$

indice di incidenza cellulare — simpliciale

Infatti: due casi:

1) $\tau \not\subset \partial\sigma \Longrightarrow \varepsilon(\sigma,\tau)=0$ _ Devo vedere che $\varepsilon(g_\sigma, g_\tau)=0$: infatti è

$$\deg\left(\partial\Delta_n \xrightarrow{g_\sigma} K^{(n-1)} \xrightarrow{\pi_\tau} K^{(n-1)} \big/ K^{(n-1)} \setminus \mathrm{int}(\tau) \xrightarrow{h_\tau^{-1}} \Delta_{n-1} \big/ \partial\Delta_{n-1} \xrightarrow{u^{(n-1)}} \partial\Delta_n\right)$$

$\sigma \cap \mathrm{int}(\tau) = \emptyset \Longrightarrow g_\sigma$ è costante $\Longrightarrow \deg = 0$


2) $\tau \subset \sigma$. Supponiamo $\varepsilon(\sigma, \tau) = +1$

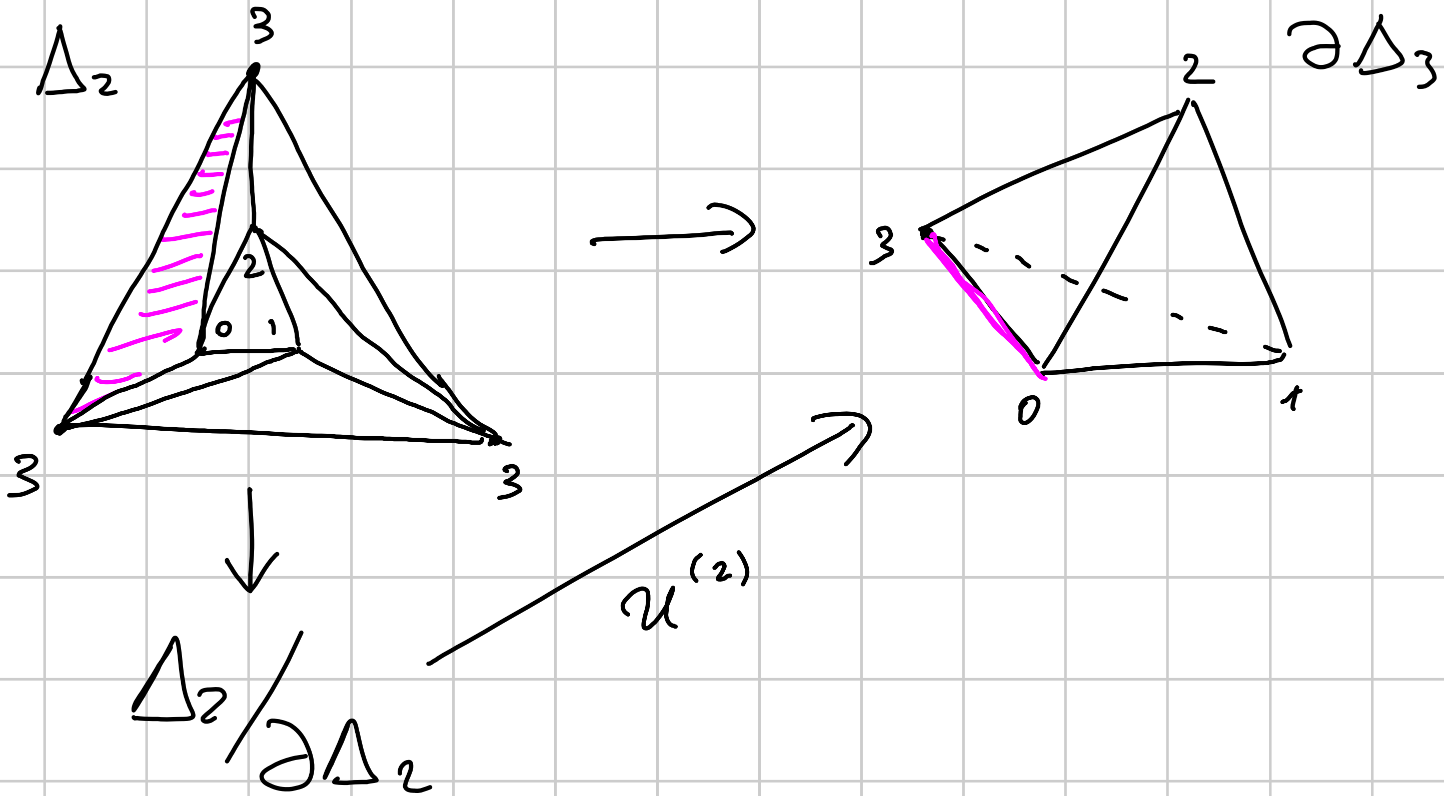
$\sigma = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_n)$ $\quad \tau = \mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_n)$

con orientazione.

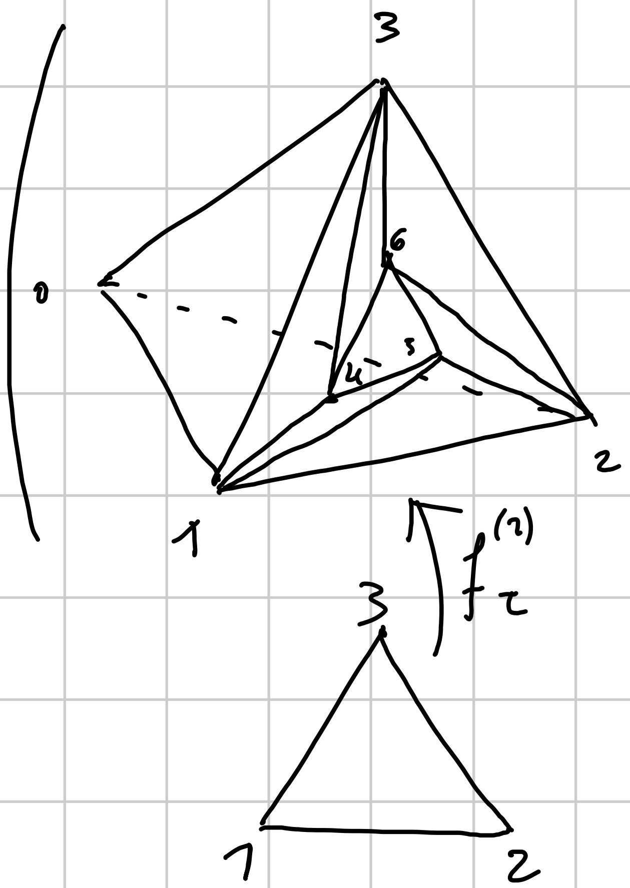
Devo calcolare il grado della composiz. di sopra.

Usando una versione PL di $U^{(n-1)}$:

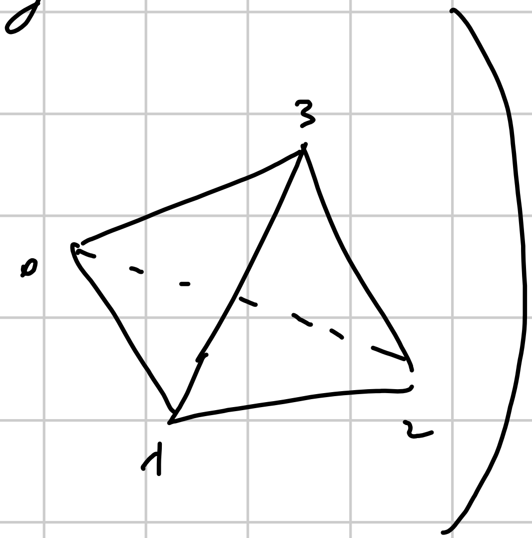
(continuo con $n = 3$) :



$\sigma \cong \Delta_3$ $\qquad \varepsilon(g_\sigma, g_\tau) = \deg$




$\longrightarrow$




$0, 1, 2, 3 \longmapsto 0$

$4 \longmapsto 1 \quad 5 \longmapsto 2 \quad 6 \longmapsto 3$

$$\partial\Delta_3 = \underbrace{\underset{\dim<2}{\downarrow}{013} + \underset{\dim<2}{\downarrow}{021} + \underset{\dim<2}{\downarrow}{032} + \underset{\dim<2}{\downarrow}{125} + \underset{021}{\downarrow}{154} + \underset{\dim<2}{\downarrow}{236} + \underset{032}{\downarrow}{265} + \underset{\dim<2}{\downarrow}{314} + \underset{013}{\downarrow}{346} + \underset{123}{\downarrow}{456}}$$

$$021 + 032 + 013 + 123$$

$$\Longrightarrow [\partial\Delta_3] \longmapsto [\partial\Delta_3] \Longrightarrow \deg = 1 .$$

<u>Esercizio</u>: la mappa $D^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ che induce $u^{(n-1)}$ è

$$x \longmapsto \frac{(2x(1-\|x\|), 2\|x\|-1)}{1-2\|x\|+2\|x\|^2}$$

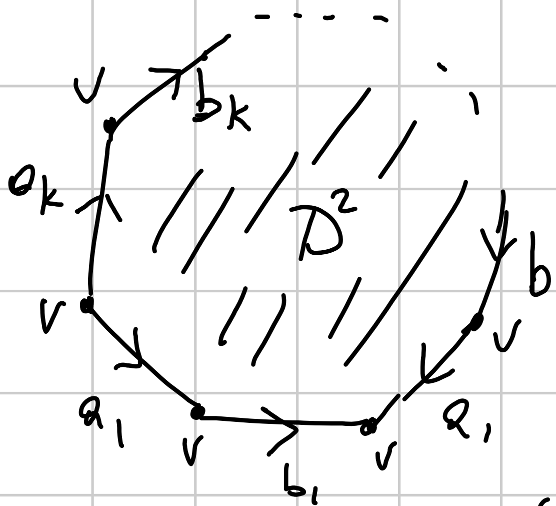
(se $\|x\|=1$ si ha $x \mapsto (0,1)$).

Def di $\mathcal{E}$: sembra complicata ma in pratica:

- arrivato a $X^{(n-1)}$ ho individuato in esso insiemi aperti con identificazioni fissate a $B^{n-1}$ (le chiusure possono non essere $D^{n-1}$ ma coprono $X^{(n-1)}$)
- per calcolare $\partial\left(g_\alpha^{(n)} : D^n \longrightarrow X^{(n-1)}\right)$

esprimo la sua immagine come comb. lin. dei $B^{n-1}$ ignorando tutto ciò che ha dim $\leq n-2$.

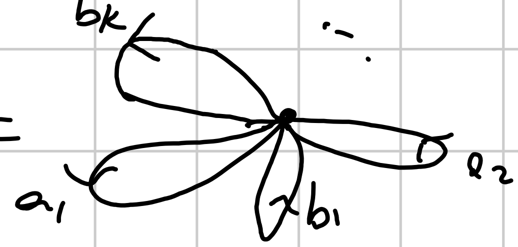
**Es:** $\Sigma_k =$




dà una struttura a $\Sigma_k$ di CW-complesso con:

$X^{(0)} = V$

$X^{(1)} =$




$\partial_1 a_j = 0$

$\partial_1 b_j = 0$

$X^{(2)}$ è ottenuto attaccando $D^2$ a $X^{(1)}$ lungo le mappe

$g : S^1 \longrightarrow X^{(1)}$

$g = a_1 \cdot b_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b_1^{-1} \cdots \quad a_k \cdot b_k \cdot a_k^{-1} \cdot b_k^{-1}$

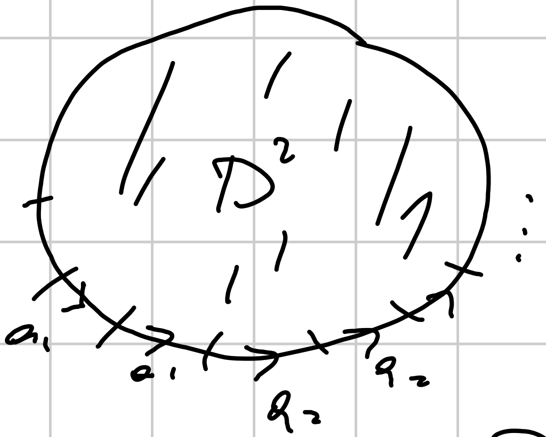
$\Longrightarrow \partial_2 g = 0$

$\Longrightarrow \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad -1$

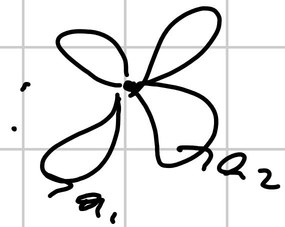
$(C, \partial) = 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^{2k} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow H_* = 0 \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}^{2k} \quad \mathbb{Z} \quad 0$

Es: $k \cdot \mathbb{P}^2 =$




$\Rightarrow X^{(0)} = V \qquad X^{(1)} =$




$k \cdot \mathbb{P}^2$ ottenuto attaccando $D^2$ e $X^{(1)}$ via

$g: S^1 \to X^{(1)} \qquad g = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \ldots \; a_k^2$

$\Rightarrow \partial_1 a_j = 0 \qquad \partial_2 g = 2 \cdot (a_1 + \dots + a_k)$

$$(C, \partial) = \begin{array}{ccccccccc} 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^k & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$1 \mapsto (2, \dots, 2)$

$\Rightarrow H_* \qquad 0 \qquad 0 \qquad \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/_2 \qquad \mathbb{Z} \qquad 0$

Es: $S^n$ ha una struttura di CW-complesso con una 0-cella e una $n$-cella

$$\left( D^n / S^{n-1} \cong S^n \right.$$

$$\left. \Rightarrow \text{pto} \bigcup_{\text{cost}: S^n \to \text{pto}} D^n \cong S^n \right)$$

$$\Rightarrow H_j(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & j = 0, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (n \geq 1)$$

imbroglio: $H_*^{CW}$ usa $H_*^{simpl}(S^n)$

Es: Sia $M$ una $n$-varietà PL chiusa connessa. Posso realizzarla con CW-complesso con una sola $n$-cella: sia $\Gamma$ il grafo degli incollamenti degli $n$-simplessi in una triangolazione di $M$:

- un vertice $\hat{\sigma}$ per ogni $\sigma \in M^{[n]}$
- un lato $\hat{\tau}$ che unisce $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ se $\tau \in M^{[n-1]}$ faccia di $\sigma_1, \sigma_2 \in M^{[n]}$.

Sia $T$ un albero massimale in $\Gamma$: allora

$M$ si ottiene da $\left| \{ \tau \in M^{[n-1]} : \hat{\tau} \not\subset T \} \right|$ attaccando una singola $n$-cella:

[ da finire giovedì ]