ETA 16/12/14

Visto : $\mathcal{C} = (C_n, \partial_n)_{n=0}^{+\infty}$ G

$$C^n_G = Hom(C_n, G) \ , \ \delta^G_n = \partial^*_{n+1}$$

$$\Rightarrow (C^n_G, \delta^G_n) \rightsquigarrow H^n_G(\mathcal{C}) \ \_$$

In particolare : $H^n(X, A; G)$ per

(X,A) coppie PL, Δ-complessi, CW, TOP

↳ spiegarlo (dopo)

Proprietà fond(e caratterizzanti):

1. Funtore controvar:

$$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$$

$$f^{\#}: C^*(Y,B;G)\longrightarrow C^*(X,A;G)$$

$$(f^{\#}\varphi)(\sigma)=\varphi(f\circ\sigma)$$

Facile:

$$\delta_n^{(X,A)}\circ f_n^{\#}=f_{n+1}^{\#}\circ\delta_n^{(Y,B)}$$

$\Longrightarrow$ è ben def. $f_n^* : H^n(Y,B;G) \to H^n(X,A;G)$ _

2. omotopia: $f \simeq g \Longrightarrow f^* = g^*$

3. escissione (TOP): $\overline{Z} \subset \mathrm{int}(A)$

$$\Longrightarrow H^n(X,A;G) \cong H^n(X \setminus Z, A \setminus Z; G)$$

4. dimensione

$$H^n(\{pt\};G) = \begin{cases} G & n=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

5. 0-coomologia :

X c.a $\Longrightarrow$ $H^0(X;G) = G$

6. LES : esiste una LES funtoriale

$$\dots \to H^n(X,A;G) \xrightarrow{i^*} H^n(X;G) \xrightarrow{j^*} H^n(A;G) \xrightarrow{\Delta_n} H^{n+1}(X,A;G) \to \dots$$

$$A \xhookrightarrow{j} X \xhookrightarrow{i} (X,A)$$

Spiegazione di Δ_n :

Lem (serve dopo) : $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ esatta

G gruppo ab e dualizzo rispetto a G

$\Rightarrow$ $A^* \xleftarrow{i^*} B^* \xleftarrow{p^*} C \leftarrow 0$ è esatta.

Se inoltre $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$

è esatta e <u>splitta</u> allora

$$0 \leftarrow A^* \xleftarrow{i^*} B^* \xleftarrow{p^*} C^* \leftarrow 0$$

è esatta.

Dim: p^* iniettiva : $p^*(\gamma) = 0$

$\Rightarrow p^*(\gamma)(b) = 0 \quad \forall b \in B$

$\Rightarrow \gamma(p(b)) = 0 \quad \forall b \in B$ ma $B \xrightarrow{p} C \to 0$

$\Rightarrow \gamma(c) = 0 \quad \forall c \in C \Rightarrow \gamma = 0$ _

$\operatorname{Im} p^* \subset \operatorname{Ker} i^*$ poiché $i^* \circ p^* = (p \circ i)^* = 0^* = 0$

$\operatorname{Im} p^* \supset \operatorname{Ker} i^*$: sia $\beta \in B^*$, $i^*(\beta) = 0$

cioè $i^*(\beta)(a) = 0 \quad \forall a \in A$

cioè $\beta(i(a)) = 0 \quad \forall a \in A$.

Definisco $\gamma \in C^*$ ponendo $\gamma(p(b)) = \beta(b)$:

è ben def. perché b è surgettiva e se $p(b) = 0$

allora $b = i(a) \Longrightarrow \gamma(p(b)) = \beta(i(a)) = 0$

Inoltre $\beta = p^*(\gamma)$.

Se $0 \to A \xrightarrow{i} B \dots$ splitta, ho $q : B \to A$

t.c. $q \circ i = id_A$; devo provare che i^* è surgettiva.

Data $\alpha \in A^*$ pongo $\beta \in B^*$ come

$$\beta(b) = \alpha(q(b))$$.

Per costruzione $\alpha = i^*(\beta)$. ▨

LES : $0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{j_\#} C_n(X) \xrightarrow{i_\#} C_n(X,A) \longrightarrow 0$

è esatta e splitta : $q : C_n(X) \to C_n(A)$

$$q(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{se } \sigma \subset A \\ 0 & \text{al}\_\_\_\_ \end{cases}$$

dualizzando, per il Lem :

$$0 \longleftarrow C^n(A) \xleftarrow{j^\#} C^n(X) \xleftarrow{i^\#} C^n(X,A) \longleftarrow 0$$

quindi per la tecnologia generale ho

$$H^{n+1}(X,A) \xleftarrow{\Delta_n} H^n(A) \xleftarrow{j^*} H^n(X) \xleftarrow{i^*} H^n(X,A)$$

Δ_n:

$$\begin{tikzcd}
 & & C^{n+1}(X) & C^{n+1}(X,A) \arrow[l, "i^\#"'] & 0 \arrow[l] \\
 & & & \eta & \\
0 & C^n(A) \arrow[l] & C^n(X) \arrow[l, "j^\#"'] \arrow[uu, "\delta_n"'] & & \\
 & \varphi & \psi & &
\end{tikzcd}$$

$\varphi \rightsquigarrow \psi$ t.c. $j^\#(\psi) = \varphi \rightsquigarrow \eta$ t.c.

$i^\#(\eta) = \delta_n \psi$

$$i^{\#}(\eta)(u) = (\delta_n \psi)(u) \qquad \forall u \in C_{n+1}(X)$$

$$\eta(i(u)) = \psi(\partial_{n+1} u)$$

$$\Rightarrow \eta(u + C_{n+1}(A)) = \psi(\partial_{n+1} u)$$

dunque "modulo le ind. naturali" Δ_n è il cobordo_

* * *

Altre proprietà: $\tilde{H}^*$ teoria ridotta

ottenuta dualizzando

$$C_n \to C_{n-1} \cdots C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} = \mathbb{Z} \to 0$$

$$\sum k_x \cdot x \mapsto \sum k_x$$

Se X è c.a.

$$\widetilde{Z}^0(X;G) = \{\varphi \in C^0(X;G) : \delta_0 \varphi = 0\}$$

$$= \{\varphi : X \to G : \varphi(\alpha(1)) - \varphi(\alpha(-1)) = 0 \quad \forall \alpha : \Delta_1 \to X\}$$

= funzioni costanti $X \to G$.

$\tilde{B}^0(X;G) = \operatorname{Im}(\delta_{-1})$ $\qquad (G = \mathbb{Z})$

$C_{-1} = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \qquad (\delta_{-1} 1)(x) = 1(\partial_0 x) = 1$

$\Rightarrow \tilde{B}^0 = \tilde{Z}^0 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{H}^0 = 0$

Invece $\tilde{H}^n = H^n \quad \forall n > 0$

e $\tilde{H}^*$ soddisfa omotopia, escissione, LES _

<u>Inoltre</u>: vale Mayer-Vietoris

(Anche in H_*: la versione TOP di M-V richiede $X = A \cup B$ con $X = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$.)

Per H^*: $X = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$ allora ho LES:

$$\dots \to H^n(X;G) \xrightarrow{\underline{\Psi}} H^n(A;G) \oplus H^n(B;G)$$

$$\xrightarrow{\underline{\Phi}} H^n(A \cap B;G) \xrightarrow{\Theta} H^{n+1}(X;G) \to \dots$$

dove

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, hook, "i_A"] & \\
A \cap B \arrow[ur, hook, "j_A"] \arrow[dr, hook, "j_B"'] & & X \\
 & B \arrow[ur, hook, "i_B"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\Psi = (i_A^*, i_B^*)$$

$$\Phi = j_A^* - j_B^*$$

$$Ⓗ([\omega]) = [\lambda] \qquad \lambda \in C^{n+1}(X; G)$$

$$\lambda(u) = \omega(\partial a) = -\omega(\partial b) \quad \forall u \in C_{n+1}(X)$$

dove $u = a + b$

$a \in C_{n+1}(A)$, $b \in C_{n+1}(B)$ _

Come calcolare H^* :

- Usare le proprietà di sopra (e calcoli più ottenuti)
- Difficile: uso diretto della teoria PL
- Impossibile: uso diretto della teoria SING.
- Teoria cellulare.

Esercizio: provare che $\tilde{H}^k(S^n; G) = \begin{cases} G & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$

per $n = 1, 2$ (sempre vero: seguirà UCT) _

Richiamo sul calcolo dell'omologia cellulare:

$$C_n^{CW} = \mathbb{Z}\langle X^{[n]} \rangle$$

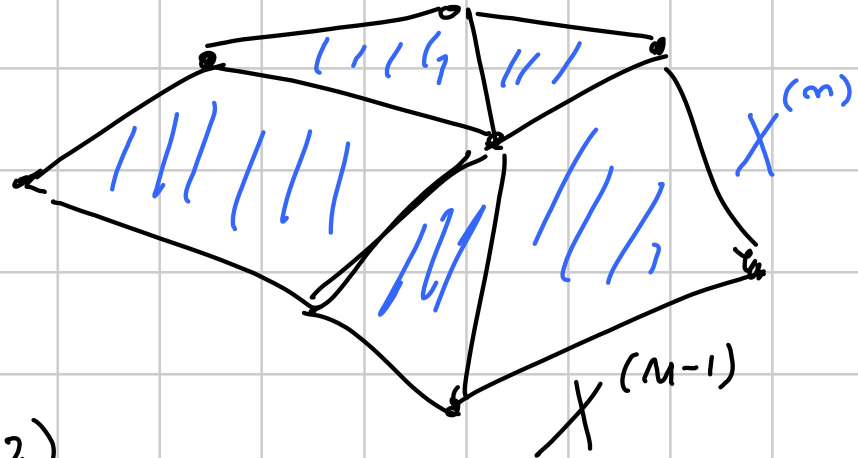
$\uparrow$ le n-celle, cioè le mappe $a : S^{n-1} \to X^{(n-1)}$ di attaccamento

Bordo $\quad \mathbb{Z}\langle X^{[n]}\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}\langle X^{[n-1]}\rangle$

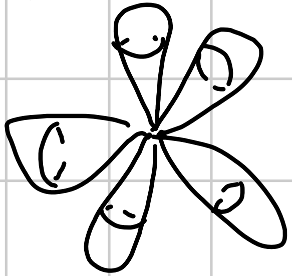
$$a \longmapsto \sum_{b} \varepsilon(a,b)\cdot b$$

$$\varepsilon(a,b) = \deg\left(S^{n-1} \xrightarrow{a} X^{(n-1)} \longrightarrow X^{(n-1)} \Big/ X^{(n-1)} \setminus B(\mathrm{int}(D^{n-1})) \underset{\text{via } B}{\cong} S^{n-1} \right)$$

Osserviamo che $X^{(n)} \Big/ X^{(n-1)} \cong \bigvee_{a\in X^{[n]}} S^{n}$:



$X^{(n)}/X^{(n-1)} \cong$



$(n=2)$

dunque $\mathbb{Z}\langle X^{[n]}\rangle$ ha interpretazione intrinseca come $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$.

Ora il bordo è :

$$H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$$

$$a \longmapsto \sum \underbrace{\varepsilon(a,b)}_{\text{il grado di sopra}} \cdot b$$

rappresenta l'espressione di $a : S^{n-1} \longrightarrow X^{(n-1)}$ come elemento di $H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ _

Ricordando che

$a = A|_{\partial D^n}$ vediamo che la mappa non è altro che il bordo, anzi è la composizione di:

$$H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{(n-1)}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$$

la mappa di bordo nella LES di $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$

la mappa di ind nella LES di $(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$

__Fatto__ : è analogo per la coomologia :

$$C^n_{CW}(X) \cong H^n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong H^n\left(X^{(n)}/X^{(n-1)}\right)$$

$$= H^n\Big(\bigvee_{X[n]} S^n\Big) = G^{X[n]}$$

e il cobordo è

$$H^n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \longrightarrow H^n(X^{(n)}) \longrightarrow H^{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)})$$

mappa da incl. nella LES di $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$

mappa cobordo nella LES di $X^{(n+1)}, X^{(n)}$

* * *

Legame generale tra $H^*(X;G)$ e $H_*(X)$.

Def: data $0 \to K \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} A \to 0$
una risoluzione libera di A, so che ho

$$K^* \xleftarrow{i^*} H^* \xleftarrow{p^*} A^* \leftarrow 0$$

e pongo $\mathrm{Ext}(A,G) = \mathrm{Coker}(i^*) = K^*/\mathrm{Im}(i^*)$.

Es: $A = \mathbb{Z}/m$; $G = \mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m\cdot} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{m\cdot} \mathbb{Z} \longleftarrow 0 \longleftarrow 0$$

(i^* non è surj per $m>1$)

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m$$

Es: $A = \mathbb{Z}$ $\forall G$

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow 0 \longleftarrow G \longleftarrow G \longleftarrow 0$$

$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, G) = 0$.

Oss: Ext non è simmetrico .

1) Devo provare che $\mathrm{Ext}(A, G)$ è ben def .

2) Teorema dei coeff. univ. per coomologia ;

Teo: esiste una successione esatta corta canonica

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}, G) \longrightarrow H^n_G \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n, G) \longrightarrow 0$$

che splitta non canonicamente.

Cor: $$H^n_{\mathbb{Z}} \cong \underbrace{\mathrm{Hom}(H_n, \mathbb{Z})}_{\substack{\mathbb{Z}^r \text{ se} \\ H_n = \mathbb{Z}^r + (\text{torsione})}} \oplus \underbrace{\mathrm{Ext}(H_{n-1}, \mathbb{Z})}_{\text{torsione di } H_{n-1}}$$

(già visto con i $E(m)$, $D(m,k)$).

Dimo (buona def. di Ext) - Supponiamo di avere due risoluzioni libere:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "k_{01}"] & H_0 \arrow[dr, "p_0"] \arrow[d, "h_{01}"] & & \\
& & & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "i_1"] & H_1 \arrow[ur, "p_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Siccome H_0 è libero posso (definendolo su una base) ottenere $h_{01} : H_0 \to H_1$ con

$$\begin{tikzcd}
H_0 \arrow[dr, "p_0"] \arrow[dd, "h_{01}"] & \\
& A \\
H_1 \arrow[ur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}$$

(dato un el. x_0 della base di H_0 devo scegliere $h_{01}(x_0)$ come un el. x_1 di H_1 t.c. $p_1(x_1) = p_0(x_0)$: posso farlo perché $H_1 \xrightarrow{p_1} A \to 0$) ___

Ora: $p_1(h_{01}(i_0(y_0)) = p_0(i_0(y_0)) = 0$ $\qquad y_0 \in K_0$

$\Longrightarrow h_{01}(i_0(y_0)) \in \mathrm{Ker}(p_1) = \mathrm{Im}(i_1)$

Inoltre $0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{i_1} H_1 \Longrightarrow$

posso definire $k_{01}(y_0) = i_1^{-1}(h_{01}(i_0(y_0))) : h_0$

$$\begin{tikzcd}
K_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "k_{01}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_0 \arrow[d, "h_{01}"] \\
K_1 \arrow[r, "i_1"] & H_1
\end{tikzcd}$$

Dualizzando :

$$\begin{tikzcd}
K_0^* & H_0^* \arrow[l, "i_0^*"'] & & \\
& & A^* \arrow[ul, "p_0^*"'] \arrow[dl, "p_1^*"] & 0 \arrow[l] \\
K_1^* \arrow[uu, "k_{01}^*"] & H_1^* \arrow[l, "i_1^*"] \arrow[uu, "h_{01}^*"] & &
\end{tikzcd}$$

Ora

$$k_{01}^*(\mathrm{Im}(i_1^*)) = k_{01}^*(i_1^*(H_1^*)) = i_0^*(h_{01}^*(H_1^*))$$

$\Rightarrow k_{01}^*(\mathrm{Im}\, i_1^*) \subset \mathrm{Im}\, i_0^*$

$\Rightarrow k_{01}^*$ induce un ben def.

$$\begin{tikzcd}
K_1^*/\mathrm{Im}(i_1^*) \arrow[r, "\overline{k_{01}^*}"] \arrow[d, equal] & K_0^*/\mathrm{Im}(i_0^*) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Coker}(i_1^*) & \mathrm{Coker}(i_0^*)
\end{tikzcd}$$

La tesi è $\mathrm{Coker}(i_1^*) \cong \mathrm{Coker}(i_0^*)$
quindi basta vedere che $\overline{K_{01}^*}$ è isomorfismo.

Claim $\overline{K_{01}^*}$ non dipende da alcuna scelta.

Da questo segue che è un isomorfismo; infatti
con costruzione analoga ottengo

$$\overline{K_{10}^*} : \mathrm{Coker}(i_0^*) \longrightarrow \mathrm{Coker}(i_1^*)$$

ma $\overline{k_{01}^*} \circ \overline{k_{10}^*} = \overline{(k_{10} \circ k_{01})^*}$

ma id

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "k_{01}"] \arrow[dd, bend right] & H_0 \arrow[d, "h_{01}"] \arrow[dd, bend right] \arrow[dr, "p_0"] & \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "k_{10}"] & H_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "h_{10}"] & {} \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r, "i_0"] & H_0 \arrow[ur, "p_0"] &
\end{tikzcd}$$

posso scegliere id

$\Downarrow$

$\overline{k_{01}^*} \circ \overline{k_{10}^*} = id$

Per l'indipendenza:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "k'_{01}"', "k_{01}"] & H_0 \arrow[d, "h'_{01}"', "h_{01}"] \arrow[dr, "p_0"] & & \\
 & & & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "i_1"] & H_1 \arrow[ur, "p_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dato $\beta_1 \in K_1^*$ devo vedere che

$$(k_{01}'^{*} - k_{01}^{*})(\beta_1) \in \mathrm{Im}(i_0^{*})$$

(ciò implica che $\overline{k_{01}'^{*}} = \overline{k_{01}^{*}}$).

Definisco $\alpha_0 \in H_0^{*}$:

dato $x_0 \in H_0$ h_0

$$p_1(h_{01}' - h_{01})(x_0) = p_0(x_0) - p_0(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow (h_{01}' - h_{01})(x_0) \in \mathrm{Ker}\, p_1 = \mathrm{Im}(i_1)$$

$\Longrightarrow \exists!\, y_1 \in K_1$ t.c. $(h'_{01} - h_{01})(x_0) = i_1(y_1)$

e pongo $\alpha_0(x_0) = \beta_1(y_1)$.

Per costruzione si ha $\beta_1 = i_0^*(\alpha_0)$. ▨