ETA 16/10/14

Teo: $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ continua, esistono $\mathcal{H}$ sudd. di $\mathcal{K}$ e $g : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ simpliciale t.c. $\forall x \in |\mathcal{K}|$, $f(x), g(x) \in \sigma \in \mathcal{L}$.

$$St(v, \mathcal{K}) = \{\sigma \in \mathcal{K} : \sigma \ni v\}$$

$$OSt(v, \mathcal{K}) = \bigcup \{\operatorname{int} \sigma : \sigma \in \mathcal{K}, \sigma \ni v\}$$

<u>Lem</u>: $OSt(v, \mathcal{K})$ aperto di $|\mathcal{K}|$.

<u>Lem</u>: dati $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{K}^{[0]}$

$$\bigcap_{j=1}^{k} OSt(v_j, \mathcal{K}) \neq \emptyset \iff (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{K}$$

(anzi se $x \in$ $\bigcap_{j=1}^{k} OSt(v_j, \mathcal{K})$ allora $x \in int(v_1, \dots, v_k)$ e vic)

<u>Dim</u>: Supponiamo $x \in \bigcap_{j=1}^{k} OSt(v_j, \mathcal{K})$.

Sappiamo

$$|K| = \bigsqcup_{\sigma \in K} \mathrm{int}(\sigma)$$

$\Rightarrow \exists! \, \sigma \in K$ t.c. $x \in \mathrm{int}(\sigma)$

$\Rightarrow \sigma \in St(v_j, K)$ cioè $v_j \in \sigma^{[0]}$

$\Rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in K$.

Viceversa se $\sigma = (v_1, \dots, v_k) \in K$ e $x \in \mathrm{int}(\sigma)$

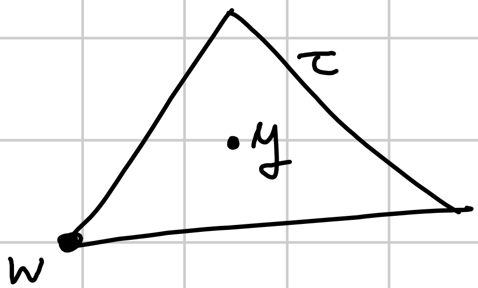
$\Rightarrow x \in OSt(v_j, K) \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{k} OSt(v_j, K) \neq \emptyset$.

$\blacksquare$

Dimo teorema: Considero

$$\{ OSt(w, \mathcal{L}) : w \in \mathcal{L}^{[0]} \}$$

è un ricoprimento aperto di $|\mathcal{L}|$:
sono aperti e se $y \in |\mathcal{L}|$ esiste $\tau \in \mathcal{L}$ t.c.
$y \in int(\tau)$; scelto $w \in \tau^{[0]}$ si ha $y \in OSt(w, \mathcal{L})$.



$\Rightarrow$ poiché $f : |K| \to |L|$ è continua ho

$\{ f^{-1}(OSt(w, L)) : w \in L^{[0]} \}$ ric. aperto di $|K|$.

Prendo ε un numero di Lebesgue di tale ricoprimento, cioè t.c. se $G \subset |K|$ e diam $(G) < \varepsilon$ allora $\exists w \in L^{[0]}$ t.c. $G \subset f^{-1}(OSt(w, L))$.

Considero $\mathcal{H}$ una suddivisione di K con $\max_{\sigma \in \mathcal{H}}(\text{diam } \sigma) < \varepsilon/2$. Per ogni $v \in \mathcal{H}^{[0]}$ esiste allora $g_0(v) \in \mathcal{L}^{[0]}$ t.c.

$$B_{\varepsilon/2}(v) \subset f^{-1}(OST(g_0(v), \mathcal{L}))$$

esiste perché $\text{diam } B_{\varepsilon/2}(v) < \varepsilon$.

Affermo che $g_0 : \mathcal{H}^{[0]} \to \mathcal{L}^{[0]}$ si estende a una funzione simpliciale $g : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ che soddisfa i requisiti del teorema.

Per vedere che g esiste devo provare che
$\forall (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{H}$ ho $\mathrm{Conv}(\underbrace{g_0(v_1), \dots, g_0(v_k)}_{\text{Possono esserci ripetizioni}}) \in \mathcal{L}$.

Scelgo $x \in \mathrm{int}(v_1, \dots, v_k)$; poiché $\max \operatorname{diam} \mathcal{H} < \varepsilon/2$

ho $x \in B_{\varepsilon/2}(v_j) \quad j = 1 \dots k$

$\Rightarrow x \in f^{-1}\left(\mathrm{OSt}(g_0(v_j), \mathcal{L})\right) \quad j = 1 \dots k$

$\Rightarrow f(x) \in \mathrm{OSt}(g_0(v_j), \mathcal{L}) \quad j = 1 \dots k$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} OSt(g_0(v_i), f) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow (g_0(v_1), \dots, g_0(v_k)) \in \mathcal{L}.$$

Seconda affermazione: $\forall x \in |K|$
$\exists \tau \in \mathcal{L}$ t.c. $f(x), g(x) \in \tau$.

Se $x \in int(\sigma)$, $\sigma \in \mathcal{H}$ $\sigma = (v_1, \dots, v_k)$
$\Rightarrow f(x) \in int(g_0(v_1), \dots, g_0(v_k))$ come sopra;
inoltre $g(x) \in int(g_0(v_1), \dots, g_0(v_k))$

poiché g è ottenuta da g_0 per estensione alle combinazioni convesse. $\blacksquare$

Versione relativa:

Teo: Siano K, L complessi simpliciali.
$M \subset K$, $N \subset L$ sottocomplessi.
$f : |K| \to |L|$ continua con
$f(|M|) \subset |N|$.

Allora esistono $\mathcal{H}$ suddivisione di $\mathcal{K}$ e
$g: \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ simpliciale t.c.

- $g(|\mathcal{M}|) \subset |\mathcal{N}|$
- $\forall x \in |\mathcal{K}| \ \exists \tau \in \mathcal{L}$ t.c.

$$f(x), g(x) \in \tau$$

con $\tau \in \mathcal{N}$ se $x \in |\mathcal{M}|$.

"Dim" Applicare la costruzione precedente per definire g su $|\mathcal{M}|$ e poi riapplicarla per estendere g a $|\mathcal{K}|$. $\blacksquare$

Teo: Se $|K_0| \simeq |K_1|$ allora
$$H_*(K_0) \cong H_*(K_1).$$

($X \simeq Y$ se esistono $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ t.c. $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$).

Dunque: l'omologia definita usando la combinatoria geometrica dei complessi simpliciali dipende solo dal tipo di omotopie (in particolare solo del tipo di omeo) _

Primo passo: provare che se

$$f : |K| \to |L| \quad \text{continua}$$

allora $f_* : H_* |K| \to H_* |L|$ è ben. def.
tramite questa costruzione; si prende
H suddivisione di K e $g : H \to L$ come
nel teo di approx simpliciale (dunque

$g \simeq f$) e si definisce

$$\begin{tikzcd} H_*(\mathcal{K}) \arrow[r, "\text{suddivisione}", "\cong"'] \arrow[dr, dashed, "f_*"'] & H_*(\mathcal{H}) \arrow[d, "g_*"] \\ & H_*(\mathcal{L}) \end{tikzcd}$$

Per la buona def serve:

Prop.: Se $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ sono suddivisioni di $\mathcal{K}$, $g_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{L}$, $g_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{L}$ simpliciali e $g_0 \simeq g_1$ (tramite funzioni continue)

$$\Longrightarrow \begin{tikzcd} & H_*(\mathcal{H}_0) \arrow[dr, "g_{0*}"] & \\ H_*(\mathcal{K}) \arrow[ur, "s_0", "\cong"'] \arrow[dr, "s_1"', "\cong"] \arrow[rr, dashed, "f_*"] & & H_*(\mathcal{L}) \\ & H_*(\mathcal{H}_1) \arrow[ur, "g_{1*}"'] & \end{tikzcd}$$

commuta.

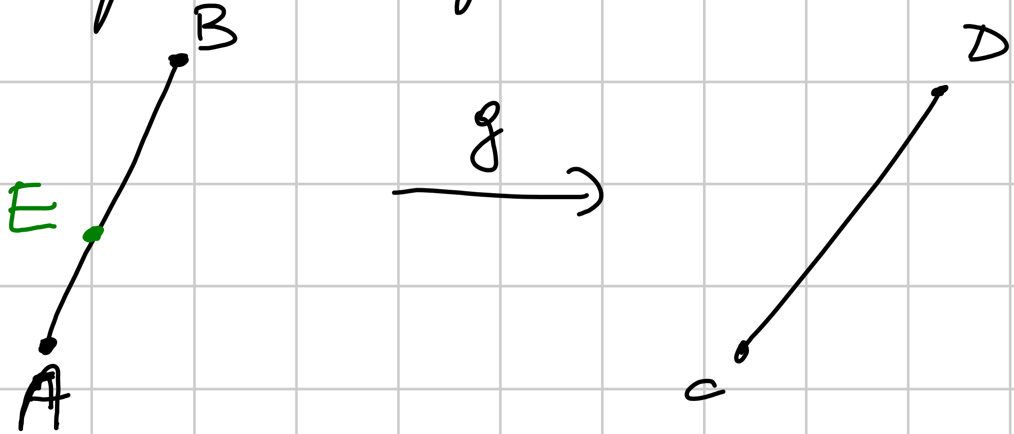
(Cioè: "a meno degli isomorfismi

canonici di suddivisione, funzioni simpliciali tra loro omotope inducono gli stessi omomorfismi in omologia.)

(La Prop basta perché se prendo $g_0 \simeq f$ e $g_1 \simeq f$ allora $g_0 \simeq g_1$ e quindi la def di f_* come ${g_0}_* \circ s_0 = {g_1}_* \circ s_1$ funziona.)

<u>Oss</u>: Se H suddivide K e $g : K \to L$ è simpliciale, non è vero che la stessa

g è simpliciale rispetto ad $\mathcal{H}_-$



$g(A) = C \qquad g(B) = D \qquad \underset{\mathcal{H}^{[0]}}{\underset{\cap}{g(E)}} \notin \mathcal{I}^{[0]}$

Lem: Sia $f: \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ simpliciale

$\mathcal{H}$ suddivisione di $\mathcal{K}$

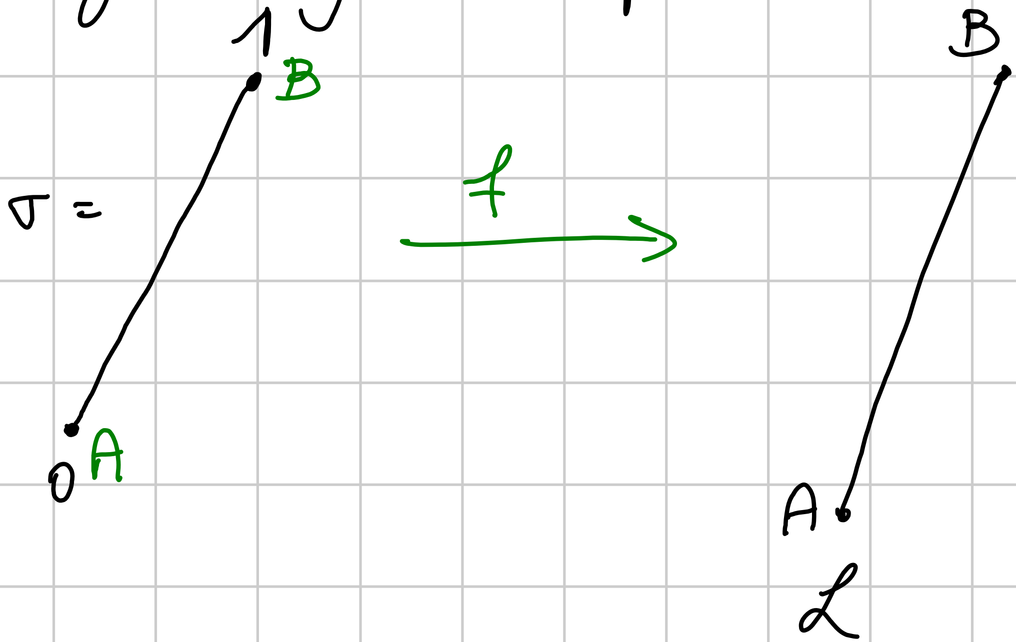
$g: \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ simpliciale t.c.

$g(v) \in f(\sigma)^{[0]}$ se $v \in \mathrm{int}(\sigma)$, $\sigma \in \mathcal{K}$

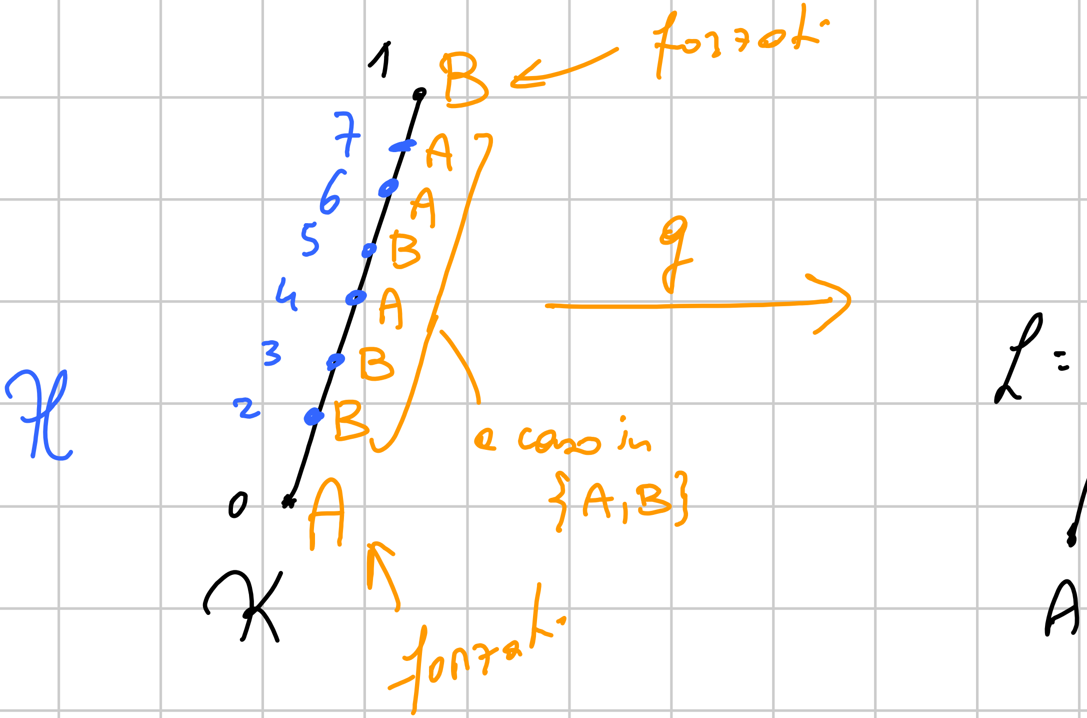
$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} C_n(\mathcal{K}) \arrow[r, "\lambda", "\text{(suddivisione)}"'] \arrow[dr, "f_*"'] & C_n(\mathcal{H}) \arrow[d] \\ & C_n(\mathcal{L}) \end{tikzcd}$$

commuta.

Sia l'ipotesi sia la tesi basta verificarle per ogni singolo simplesso $\sigma \in K$.



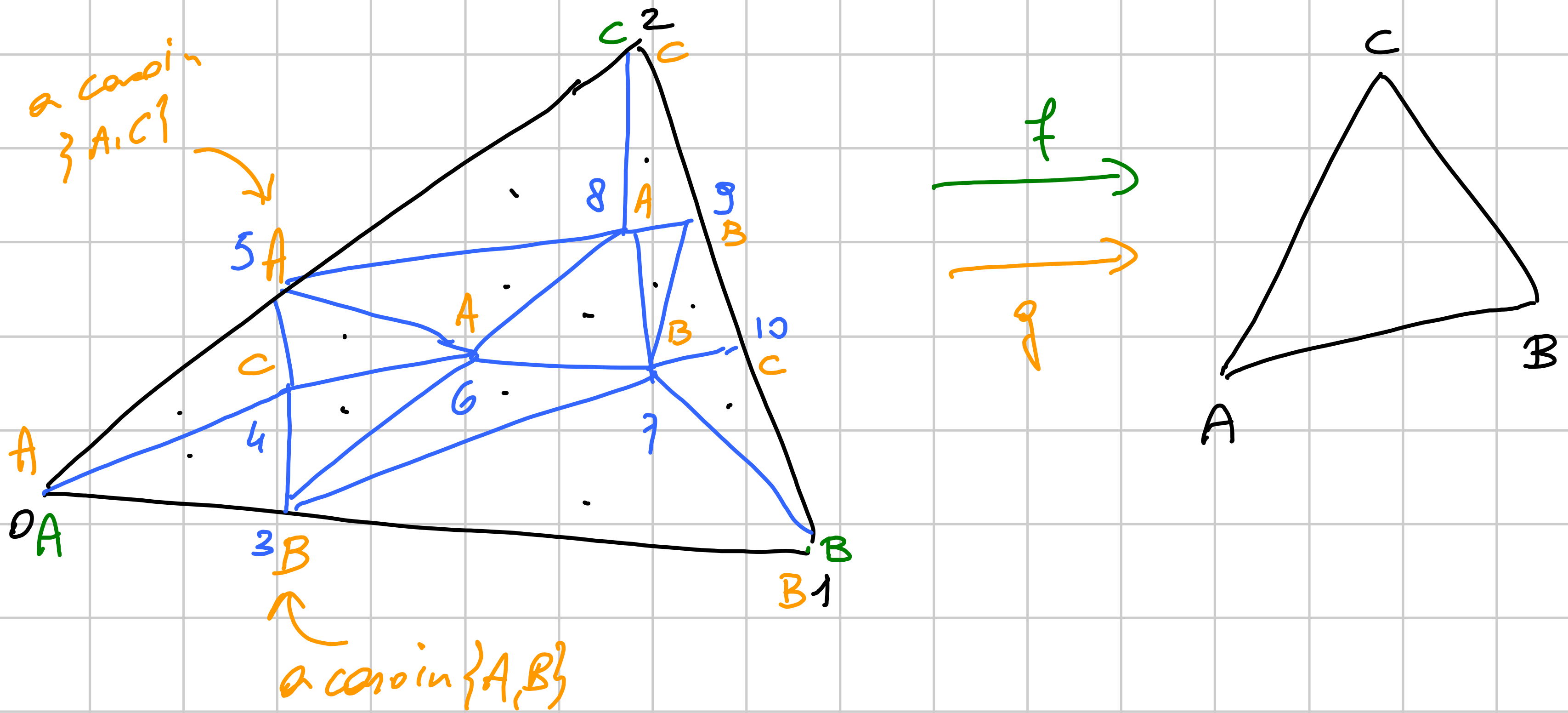
su ogni vertice v di $\sigma \in K$ scrivo $f_0(v)$



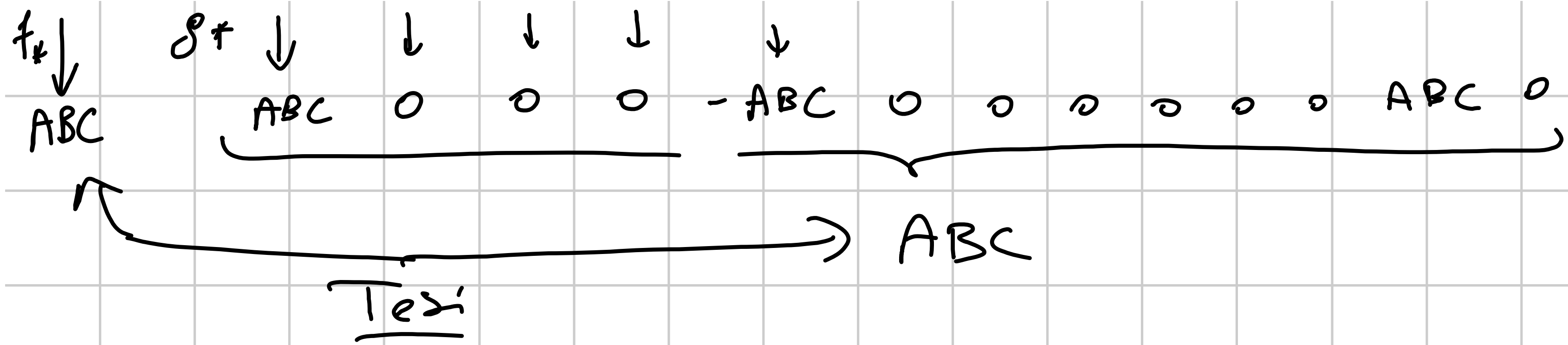
$$\begin{array}{ccc} 01 & \xrightarrow{\lambda} & 02 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 71 \\ f_* \downarrow & & \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \; g_* \\ AB & & \underbrace{AB \quad 0 \quad -AB \quad AB \quad -AB \quad 0 \quad AB} \end{array}$$

AB

Tesi del Lemma



$$012 \xrightarrow{\partial} 034 + 045 + 317 + 376 + 364 + \dots$$



Idee della dimo generale:

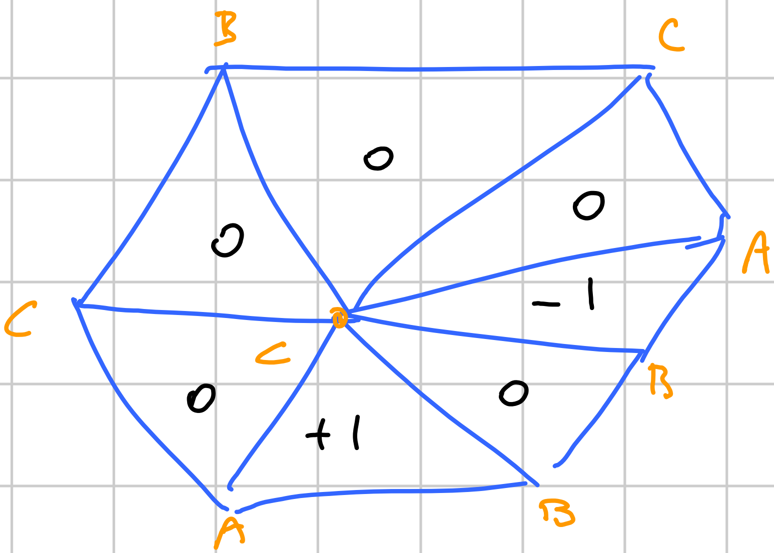
Ricordo: $\underset{\mathcal{K}^{[m]}}{\underset{\cap}{\partial(\sigma)}} = \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{K}^{[m]} \\ \tau < \sigma}} \tau$ (τ orientato come σ)

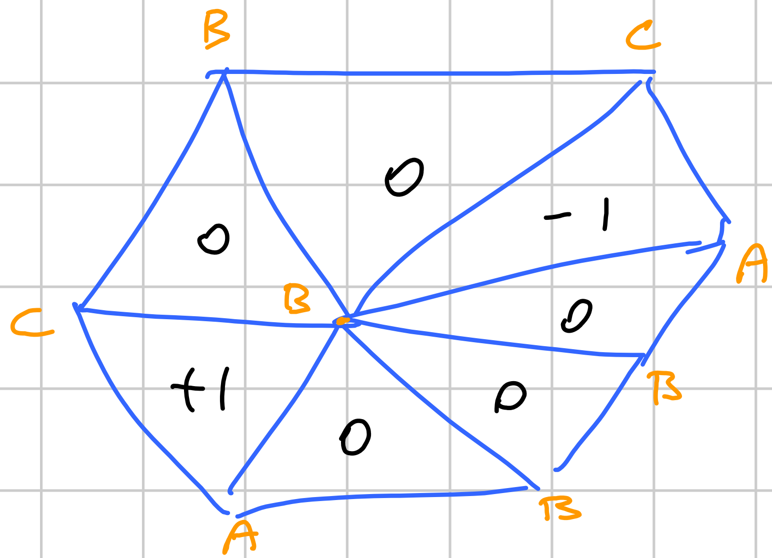
Se $f_*(\sigma) = 0$ cioè $\dim(f(\sigma)) < n$

è chiaro che $g_{\#}(\tau) = 0 \;\; \forall \tau \in \Delta(\sigma) \Rightarrow$ ok.

Altrimenti usare questa strategia:

1. Provare che cambiando il valore di φ su un solo vertice (in modo lecito) il valore di $g_{\#}$ non cambia:



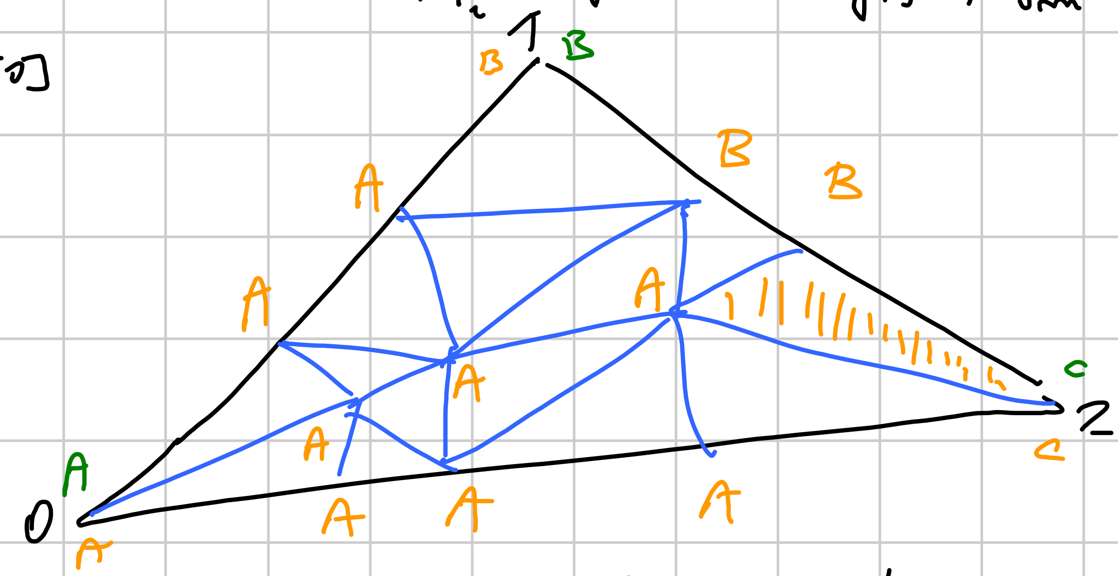


2. Ci si riduce a questo caso:

Se $\sigma = (v_0, \dots, v_m)$ e $f(v_j) = w_j$

$$\underset{\mathcal{H}^{[\sigma]}}{\overset{\cap}{g(p)}} = w_{\min\{j_i \,:\, p \in \operatorname{int}(v_{j_1}, \dots, v_{j_m})\}}$$

cioè



Ora si ha $g_*(\tau) = 0 \;\; \forall \tau \subset \sigma$ tranne uno solo e si mostra che il segno è quello di $f_*(\sigma)$ _ $\blacksquare$

Prop: $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ suddiv. di K

$g_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{L}$, $g_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{L}$ simpliciali + omotope

$$\Rightarrow H_*(K) \begin{array}{c} \xrightarrow[\cong]{s_0} H_*(\mathcal{H}_0) \xrightarrow{g_{0*}} \\ \circlearrowright \\ \xrightarrow[\cong]{s_1} H_*(\mathcal{H}_1) \xrightarrow{g_{1*}} \end{array} H_*(\mathcal{L})$$ _

Cor 1: $f_* : H_*(K) \to H_*(\mathcal{L})$ ben def

per $f : |K| \to |\mathcal{L}|$ continua _

(a meno degli isomorf. canonici)

Cor 2: $f_0, f_1 : |K| \to |L|$ continue

$f_0 \simeq f_1 \Longrightarrow f_{0*} = f_{1*}$
(a meno degli isomorf canonici)

Oss: $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ per f, g continue

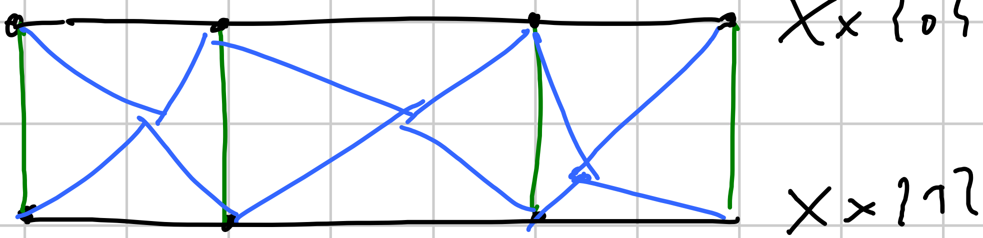
Cor 3: $|K| \simeq |L| \Longrightarrow H_*(K) \cong H_*(L)$ _

Dimo della Prop: Pongo $X = |K|$.

Sappiamo che esiste $G : X \times [0,1] \to |L|$ continua t.c. $G(\cdot, 0) = g_0$, $G(\cdot, 1) = g_1$.
(g_j simpliciale rispetto a $\mathcal{H}_j$ che suddivide K).

Prendo $\mathcal{H}$ suddivisione comune di $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_1$.
La estendo a una triangolazione $\mathcal{M}$ di $X \times [0,1]$ in modo che $\mathcal{M} \cap X \times \{0\} = \mathcal{H}$
$\mathcal{M} \cap X \times \{1\} = \mathcal{H}$:

- parto da $\mathcal{H}$ su $X\times\{0\}$ e $X\times\{1\}$
- aggiungo i lati $\mathcal{H}^{[0]}\times[0,1]$
- induttivamente triangolo $\sigma\times[0,1]$ con $\sigma\in\mathcal{H}^{[\geq 1]}$ prendendo il cono da un punto interno su $\partial\sigma\times[0,1]$ che è già triangolato



(in realtà si può fare senza aggiungere vertici).

Applichiamo Teo Approx Simpl. $G: \underbrace{X \times [0,1]}_{|\mathcal{M}|} \to |\mathcal{L}|$

Trovo $\mathcal{N}$ suddiv. di $\mathcal{M}$
e $F: \mathcal{N} \to \mathcal{L}$ simpliciale t.c.

$\forall x \in X \times [0,1] \ \exists \tau \in \mathcal{L}$ t.c. $F(x), G(x) \in \tau$.

Noto che $\mathcal{M}_j = \mathcal{N} \cap (X \times \{j\})$ $\quad j = 0, 1$
è una suddivisione di $\mathcal{H}$, dunque di $\mathcal{H}_j$.

Inoltre $F(\cdot, j) : \mathcal{N}_j \to \mathcal{L}$ è legata a $g_j : \mathcal{H}_j \to \mathcal{L}$ come nel Lemma

(segue dalla costruzione della dim. del TAS:
$F(v)$ è scelto come un vertice di $G(\sigma)$ se $v \in \operatorname{int}(\sigma)$) :

$\forall v \in \mathcal{N}_j$ ho $F(v, j) \in g_j(\sigma)^{[0]}$ se $v \in \operatorname{int}(\sigma)$ con $\sigma \in \mathcal{H}_j$

$j = 0, 1$

$$\begin{tikzcd}
C_n(\mathcal{H}_j) \arrow[r, "\text{sudd.}"] \arrow[dr, "g_{j*}"'] & C_n(\mathcal{M}_j) \arrow[d, "f_{j*}"] \\
& C_n(\mathcal{L})
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$

$\left(f_j := F(\cdot, j) \right)$ —

Allo stesso modo possiamo suddividere $\mathcal{M}_0$ e $\mathcal{M}_1$ a una comune (cioè supporre $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 =: \mathcal{P}$) continuando ad avere che $\mathcal{M}$ induce una trie di $\sigma \times [0,1]$ $\forall \sigma \in \mathcal{P}$.

(Idea: prendo suddivisione comune di $\mathcal{N}_0$ e $\mathcal{N}_1$; la estendo a $X \times [0,1]$; interseco con $\mathcal{N}$ e con $\mathcal{P} \times [0,1]$ e suddivido ancora; ridefinisco F usando la regola del Lemma.)

Abbiamo: $\mathcal{P}$ suddivisione comune di $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_1$
$\mathcal{N}$ tria di $X \times [0,1]$ con
$\mathcal{M} \cap (X \times \{i\}) = \mathcal{P}$; $\mathcal{N}$ induce una

fine di $\sigma \times [0,1]$ $\forall \sigma \in \mathcal{P}$; $F: \mathcal{N} \to \mathcal{L}$ simpliciale t.c. f_i e g_i soddisfano il Lemma:

$$\begin{tikzcd}
 & H_*(\mathcal{H}_0) \arrow[dr, "\bar{g}_0"] \arrow[rr, bend left, "g_{0*}"] \arrow[dd, phantom, "\circlearrowright"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(\mathcal{L}) \arrow[dd, equal] \\
\mathcal{H}_*(K) \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & & H_*(\mathcal{P}) \arrow[ur, "f_{0*}"'] \arrow[dr, "f_{1*}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
 & H_0(\mathcal{H}_1) \arrow[ur, "\bar{g}_1"'] \arrow[rr, bend right, "g_{1*}"'] & {} & H_n(\mathcal{L})
\end{tikzcd}$$

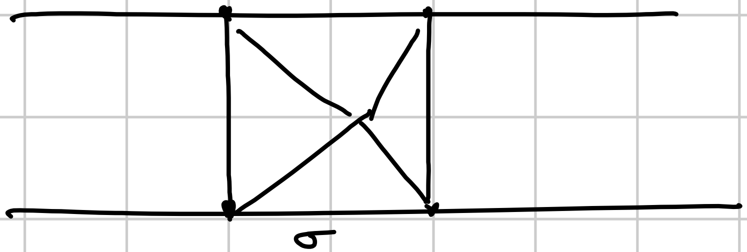
$\circlearrowright$ per naturalità

$\circlearrowright$ per Lemma

$\Longrightarrow$ per concludere basta vedere che $f_{0*} = f_{1*}$.

Infatti $z \in Z_n(\mathcal{P})$

$\Rightarrow$ $z \times [0,1] \in C_{n+1}(\mathcal{N})$ ha senso perché $\mathcal{N}$ contiene $\mathcal{P} \times [0,1]$



$$\partial^{\mathcal{N}}_{n+1}(z \times [0,1]) =$$

$$= z \times \{0\} - z \times \{1\} + (\partial^{\mathcal{P}}_n z) \times [0,1]$$

$$\partial^{\mathcal{P}}_n z = 0$$

Applicando F trovo

$$f_{0*}(z) - f_{1*}(z) = F_*\left(\partial_{n+1}^{\eta}(z \times [0,1])\right)$$

$$= \partial_{n+1}^{\mathcal{I}}\left(F_*(z \times [0,1])\right)$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\cap \\ H_n(\mathcal{P})}}{f_{0*}([z])} = \underset{\substack{\cap \\ H_n(\mathcal{P})}}{f_{1*}([z])} \in H_n(\mathcal{I})$$

$\blacksquare$