ETA 6/11/14

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$$

$$\rightsquigarrow \dots \to H_n' \xrightarrow{i_*} H_n \xrightarrow{p_*} H_n'' \xrightarrow{d_n} H_{n-1} \to \dots$$

ϕ_n:

$$\begin{tikzcd} & w \quad C_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & z \quad C_n'' \\ u \quad C_{n-1}' \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1} & \end{tikzcd}$$

$d_n([z]) = [u]$

Esattezza in H'_{n-1} : $\qquad H''_n \xrightarrow{d_n} H'_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1*}} H_{n-1}$

$$i_{n-1*}(d_n([z])) = i_{n-1*}([u]) = [i_{n-1}(u)] = [\partial_n w] = 0 .$$

Viceversa sia

$i_{n-1*}([u]) = 0$ cioè $[i_{n-1}(u)] = 0$ cioè $i_{n-1}(u) = \partial_n w$;
pongo $z = p_n(w)$ e affermo che è un ciclo: allora si avrà $[u] = d_n([z])$;

$$\begin{tikzcd}
 & w\ C_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & z\ C''_n \arrow[d, "\partial''_n"] \\
u\ C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] & C''_{n-1}
\end{tikzcd}$$

$$\partial_n''(z) = \partial_n'' p_n(w) = p_{n-1}(\partial_n w) = p_{n-1}(\partial_{n-1}(u)) = 0 \, . \qquad \blacksquare$$

<u>Oss</u>: "LES è funtoriale rispetto alle mappe tra coppie". Cioè: se ho $f : (X, A) \to (Y, B)$ essa induce delle f_* t.c.

$$\begin{array}{ccccccc}
H_n(A) & \to & H_n(X) & \to & H_n(X, A) & \to & H_{n-1}(A) \\
\downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
H_n(B) & \to & H_n(Y) & \to & H_n(Y, B) & \to & H_{n-1}(B)
\end{array}$$

Segue dalla versione astratta:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{C}' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi'"] & \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{C}'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 & (\text{bordi } \partial', \partial, \partial'') \\
0 \arrow[r] & \mathcal{D}' \arrow[r, "j"] & \mathcal{D} \arrow[r, "q"] & \mathcal{D}'' \arrow[r] & 0 & (\text{bordi } \delta', \delta, \delta'')
\end{tikzcd}
$$

$$
\Longrightarrow
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(\mathcal{C}') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\varphi'_*"] \arrow[dr, phantom, "1"] & H_n(\mathcal{C}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] \arrow[dr, phantom, "2"] & H_n(\mathcal{C}'') \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\varphi''_*"] \arrow[dr, phantom, "3"] & H_{n-1}(\mathcal{C}') \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(\mathcal{D}') \arrow[r, "j_*"] & H_n(\mathcal{D}) \arrow[r, "q_*"] & H_n(\mathcal{D}'') \arrow[r, "e_n"] & H_{n-1}(\mathcal{D}') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Commutano tutti: ①, ② ovvio: già vero a livello di catene_

$\partial_n([z]) = [u]$

③

$$
\begin{tikzcd}
 & & {}_{w}C_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\partial_n"] \arrow[dr, "\varphi_n"] & {}_{z}C''_n \arrow[dr, "\varphi''_n"] \arrow[d, phantom, "*"] & \\
 & {}_{u}C'_{n-1} \arrow[r, "i_n"] \arrow[dr, "\varphi'_{n-1}"] & C_{n-1} \arrow[dr, "\varphi_{n-1}"] \arrow[r, phantom, "*"] \arrow[d, phantom, "*"] & \underset{\varphi_n(w)}{D_n} \arrow[r, "q_n"] \arrow[d, "\delta_n"] & \underset{\varphi_n(z)}{D''_n} \\
 & & \underset{\varphi'_{n-1}(u)}{D'_{n-1}} \arrow[r, "j_{n-1}"] & D_{n-1} &
\end{tikzcd}
$$

* tutti commut.

$\Longrightarrow$ per calcolare $e_n(\varphi''_{n*}([z]))$ posso usare $\varphi_n(w)$ e

$$\varphi'_{n-1}(u) \implies e_n(\varphi''_{n\,*}([z])) = \varphi'_{n-1\,*}([u])$$
$$= \varphi'_{n-1\,*}(d_n([z])) \,.\ \underline{\underline{OK}}$$

Interpretazione di $d_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ _

Uso costruz. alternativa di $H_n(X,A)$:

Originale : $X = |K|$, $A = |L|$, $L \subset K$:
$$C_n(X,A) = \langle \sigma \in K^{[n]} \setminus L^{[n]} \rangle$$

∂_n definito come per X dimenticando $\mathcal{L}^{[n-1]}$

$\rightsquigarrow$ $Z_n(\mathcal{K},\mathcal{L})$, $B_n(\mathcal{K},\mathcal{L})$, $H_n(\mathcal{K},\mathcal{L}) = \dfrac{Z_n(\mathcal{K},\mathcal{L})}{B_n(\mathcal{K},\mathcal{L})}$

Alternativa: $\overline{Z}_n(\mathcal{K},\mathcal{L}) = \{ z \in C_n(\mathcal{K}) : \partial_n z \in C_{n-1}(\mathcal{L}) \}$

$\overline{B}_n(\mathcal{K},\mathcal{L}) = \{ u + \partial_{n+1} w : w \in C_{n+1}(\mathcal{K}), u \in C_n(\mathcal{L}) \}$

Affermo che

$$\varphi_n : \overline{Z}_n(\mathcal{K},\mathcal{L}) \longrightarrow Z_n(\mathcal{K},\mathcal{L})$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{K}^{[n]}} m_\sigma \cdot \sigma \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{K}^{[n]} \setminus \mathcal{L}^{[n]}} m_\sigma \cdot \sigma$$

induce un isomorfismo (canonico) $\overline{Z}_n / \overline{B}_n \longrightarrow Z_n / B_n = H_n$.

Ben def: $\partial_n^{(X,A)}(z) =$ "$\partial_n z$ da cui cancello $\mathcal{L}^{[n-1]}$"

$z \in \overline{Z}_n(K,\mathcal{L})$

ma per def di $\overline{Z}_n$

$\Longrightarrow$ trovo 0

È suriettiva: $Z_n(K,\mathcal{L}) \subset \overline{Z}_n(K,\mathcal{L})$ e $\varphi_n|_{Z_n(K,\mathcal{L})} = id$ _

Infine: $\varphi_n(z) \in B_n(K,\mathcal{L})$

$\Longleftrightarrow z + u = \partial_{n+1} w$

u la parte di z in $C_n(\mathcal{L})$

$w \in C_{n+1}(\mathcal{L})$

$\Longleftrightarrow z = u + \partial_{n+1} w \qquad u \in C_n(\mathcal{L}) \quad w \in C_{n+1}(K)$

$\Longleftrightarrow z \in \overline{B}_n(K,\mathcal{L})$ _

Ora vedendo $H_n(X,A) = \dfrac{Z_n(X,A)}{B_n(X,A)}$

la mappa d_n :

ORIGINALE

$$\begin{tikzcd}
 & C_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & C_n(X,A) \\
C_{n-1}(A) \arrow[r] & C_{n-1}(X) &
\end{tikzcd}$$

NUOVA

$z \in Z(X,A) = \{ z \in C_n(X) : \partial_n z \in C_{n-1}(A) \}$

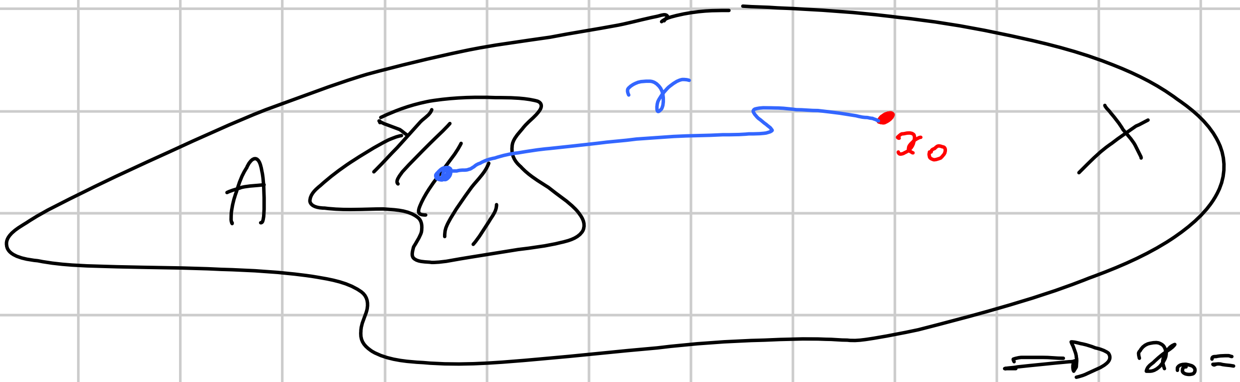
- viene vista come catena in $C_n(X)$
- prendo il bordo: trovo $\partial_n z \in C_{n-1}(A)$
- sono arrivato

Dunque $d_n([z]) = [\partial_n z]$. Dunque d_n è il bordo.

OMOLOGIA RIDOTTA

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{\#\text{ componenti connesse}} \qquad \text{(visto)}.$$

Oss: X connesso, $A \neq \emptyset \implies H_0(X,A) = 0$



$$\implies x_0 = \partial\gamma - \underset{\underset{A}{\cap}}{x_1} \implies x_0 \in B_0(X,A)$$

Nella def. di $H_n(X)$ posso aggiungere $C_{-1} = \mathbb{Z}$

e $\delta_0\left(\sum_{x \in X^{[0]}} m_x \cdot x \right) = \sum_{x \in X^{[0]}} m_x$ –

Ciò definisce un complesso di catene con omologia $\tilde{H}_*(X)$

con
$$\tilde{H}_n(X) = \begin{cases} H_n(X) & \text{per } n > 0 \\ \mathbb{Z}^{(\#\text{ componenti connesse di } X) - 1} \end{cases}$$

In particolare $\tilde{H}_0(X) = 0$ per X connesso $\overline{\underline{\;\;}}$

Tutto quanto detto per H_n vale per $\tilde{H}_n$:

- funtorialità rispetto a mappe $f:(X,A)\to(Y,B)$

- LES :

$$\dots \to H_1(A)\to H_1(X)\to H_1(X,A)\to \tilde{H}_0(A)\to \tilde{H}_0(X)$$

in pratica questo è 0
($\Rightarrow$ non scrivo $\tilde{H}_0(X,A)$)
altrimenti scrivo una LES
per ogni componente connessa

Teo: $\tilde{H}_n(S^m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n=m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Oss: $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ lo sapevamo:

per $n>0$, S^n è una n-var. orient.

per $n=0$ $\tilde{H}_0(\{*,*\}) = \mathbb{Z}$.

Dimo: Per induzione su m. Per $m=0$ ok.

Successioni esatte LES fra le coppie (S^m, D^m_+) e (D^m, S^{m-1})

$$0=\tilde H_n(D^m) \longrightarrow \tilde H_n(S^m) \xrightarrow{\cong} \tilde H_n(S^m, D^m) \longrightarrow \tilde H_{n-1}(D^m)=0$$

$$\cong \leftarrow \text{escissione}$$

$$0=\tilde H_n(D^m) \longrightarrow \tilde H_n(D^m, S^{m-1}) \xrightarrow{\cong} \tilde H_{n-1}(S^{m-1}) \longrightarrow \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\tilde H_{n-1}(D^m)}$$

$\blacksquare$

Successione esatta di Mayer-Vietoris:

<u>Prop</u>: sia $\mathcal{K}$ compl. simpl., $\mathcal{K} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ sottocompl
$\mathcal{L} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$; definite le inclusioni :

$$
\begin{tikzcd}
 & C(\mathcal{A}_1) \arrow[dr, "j^{(1)}"] & \\
C(\mathcal{L}) \arrow[ur, "i^{(1)}"] \arrow[rr, "\ell"] \arrow[dr, "i^{(2)}"'] & & C(\mathcal{K}) \\
 & C(\mathcal{A}_2) \arrow[ur, "j^{(2)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

si ha che $0 \longrightarrow C(\mathcal{L}) \xrightarrow{(i^{(1)},\, i^{(2)})} C(\mathcal{A}_1) \oplus C(\mathcal{A}_2) \xrightarrow{j^{(1)} - j^{(2)}} C(\mathcal{K}) \longrightarrow 0$
è esatta _ (Dimo: facile tra poco _)

Teo (Mayer-Vietoris): $X = Y_1 \cup Y_2$, $Z = Y_1 \cap Y_2$

(che siano supporti di complessi e sottocomplessi) $\Longrightarrow$

$$\dots \to H_n(Z) \xrightarrow{(i_*^{(1)},\, i_*^{(2)})} H_n(Y_1) \oplus H_n(Y_2) \xrightarrow{j_*^{(1)} - j_*^{(2)}} H_n(X) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(Z) \to \dots$$

(segue dal fatto generale: esatta corta di catene $\rightsquigarrow$ esatta lunga in H_*).

Oss: Vale anche per $\tilde{H}_n$ (fare aumentazione delle catene...)

Oss: se Z è connesso

$$\dots \to H_1(Z) \xrightarrow{(i_*^{(1)},\, i_*^{(2)})} H_1(Y_1) \oplus H_1(Y_2) \xrightarrow{j_*^{(1)} - j_*^{(2)}} H_1(X) \to \tilde{H}_0(Z) = 0$$

$\Rightarrow \quad H_1(X) \cong \dfrac{H_1(Y_1) \oplus H_1(Y_2)}{\text{("}H_1(Z) \text{ visto dentro ciascun addendo è lo stesso")}}$

$\Rightarrow$ è l'abelianizzazione di Van Kampen.

<u>Oss</u>: In realtà si può fare tutta la teoria senza passare a $\tilde{H}_n$ - ma con più lavoro. Nel caso precedente:

$$\cdots \to H_1(Z) \to H_1(Y_1) \oplus H_1(Y_2) \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\overset{\parallel}{H_0(Z)}} \longrightarrow H_0(Y_1) \oplus H_0(Y_2) \to \cdots$$

è surgettiva $\Leftarrow$ ha immagine 0 $\Leftarrow$ questa è iniettiva (ciascun addendo lo è)

<u>Dimo</u> (Prop):

$$0 \longrightarrow C(\mathcal{L}) \xrightarrow{\left(i^{(1)},\, i^{(2)}\right)} C(\mathcal{A}_1) \oplus C(\mathcal{A}_2) \xrightarrow{j^{(1)} - j^{(2)}} C(\mathcal{K}) \longrightarrow 0$$

Commutazione con i bordi: facile — sono tutte inclusioni.

Resta da vedere che

$$0 \longrightarrow C_n(\mathcal{L}) \xrightarrow{i} C_n(\mathcal{A}_1) \oplus C_n(\mathcal{A}_2) \xrightarrow{j} C_n(\mathcal{K}) \longrightarrow 0$$

è esatta _ Facile :

- i iniettiva (anzi lo sono $i^{(1)}$ e $i^{(2)}$)
- j surgettiva : $\displaystyle\sum_{\sigma \in K^{[n]}} m_\sigma \cdot \sigma = \underbrace{\sum_{\sigma \in A_1^{[n]}} m_\sigma \cdot \sigma}_{\in\, C_n(A_1)} + \underbrace{\sum_{\sigma \in A_2^{[n]} \setminus A_1^{[n]}} m_\sigma \cdot \sigma}_{\in\, C_n(A_2)}$

- esattezza in mezzo :

"
$$C_n(K) = \frac{C_n(A_1) \oplus C_n(A_2)}{\text{ricordarsi che i simplessi in } L \text{ sono uguali se visti in } A_1 \text{ e se visti in } A_2}$$
"

Interpretazione geometrica di ∂_n in Mayer-Vietoris:

$z \in Z_n(K)$

$$
\begin{tikzcd}
 & {\color{red}(w_1,w_2)}\; C_n(A_1)\oplus C_n(A_2) \arrow[r, "j^{(1)}_n - j^{(2)}_n"] \arrow[d, "(\partial^{(1)}_n, \partial^{(2)}_n)"] & {\color{red}z}\; C_n(K) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & 0 \\
{\color{red}u}\; C_{n-1}(L) \arrow[r, "(i^{(1)}_{n-1},\, i^{(2)}_{n-1})"] & C_{n-1}(A_1)\oplus C_{n-1}(A_2) \arrow[r, "j^{(1)}_{n-1} - j^{(2)}_{n-1}"] & C_{n-1}(K) &
\end{tikzcd}
$$

$z = \sum_{\sigma \in K^{[n]}} m_\sigma \cdot \sigma$ scrivo $z = j^{(1)}_n(w_1) - j^{(2)}_n(w_2)$

$$w_1 = \sum_{\sigma \in A_1^{[n]} \setminus \mathcal{L}^{[n]}} m_\sigma \cdot \sigma + \sum_{\sigma \in \mathcal{L}^{[n]}} p_\sigma \cdot \sigma$$

$$w_2 = \sum_{\sigma \in A_2^{[n]} \setminus \mathcal{L}^{[n]}} (-m_\sigma) \cdot \sigma + \sum_{\sigma \in \mathcal{L}^{[n]}} q_\sigma \cdot \sigma$$

devo avere $p_\sigma - q_\sigma = m_\sigma \ \forall \sigma \in \mathcal{L}^{[n]}$

Poiché $\partial_n z = 0$ so che

se applico $(\partial_n^{(1)}, \partial_n^{(2)})$ e poi $i_{n-1}^{(1)} - i_{n-1}^{(2)}$ trovo 0

e quindi sono nell'immagine di $(i_{n-1}^{(1)}, i_{n-1}^{(2)})$.

dunque esiste $u \in C_{n-1}(\mathcal{L})$ (in realtà in $Z_{n-1}(\mathcal{L})$) t.c.

$i_{n-1}^{(1)}(u) = \partial_n^{(1)} w_1 \quad i_{n-1}^{(2)}(u) = \partial_n^{(2)} w_2$.

Noto che:

per $\tau \in A_j^{[n-1]} \setminus \mathcal{L}^{[n-1]}$ ho $\varepsilon(\sigma, \tau) \neq 0$

solo per $\sigma \in A_j^{[n]} \setminus \mathcal{L}^{[n]}$

$\Longrightarrow$ coeff. di τ in $\partial_n^{(j)} z$ è 0

Per $\tau \in \mathcal{L}^{[n-1]}$ il coeff in $\partial_n^{(1)} w_1$ e in $\partial_n^{(2)} w_2$

deve essere lo stesso (si cancellano con $j_{n-1}^{(1)} - j_{n-1}^{(2)}$).

$\Longrightarrow$ in pratica:

- si parte da $z \in Z_n(K)$

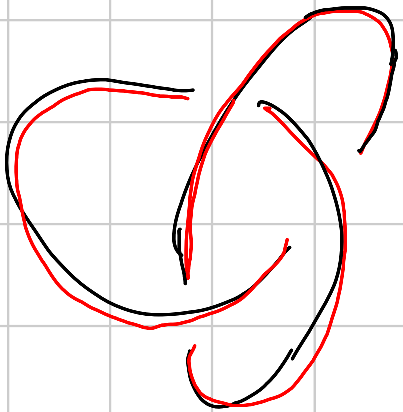
- lo si scrive come $z = w_1 - w_2$ $\quad w_j \in C_n(A_j)$
  (più semplice: tutto $\mathcal{L}$ da una delle due parti)
- si prende $\partial_n w_1$ oppure $\partial_n w_2$ che sono uguali e sono in $C_{n-1}(\mathcal{L})$ anzi in $Z_{n-1}(\mathcal{L})$ _

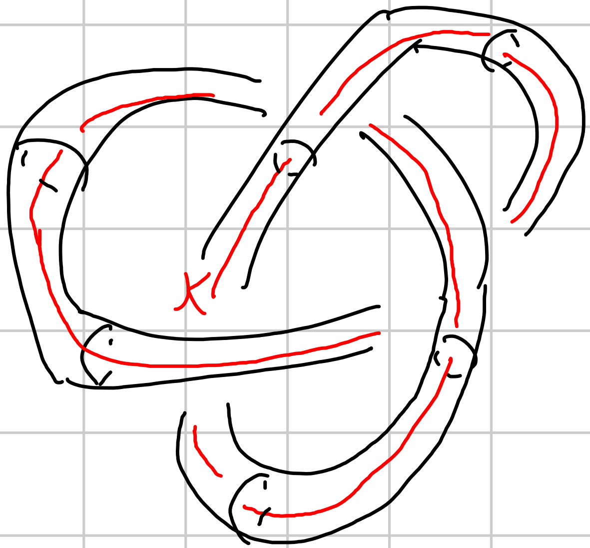
———— o ————

<u>Esercizio</u>: Chiamo nodo un embedding PL di S^1 in S^3 _
Dato K nodo, calcolare $H_1(S^3 \setminus K)$ _

Att: $S^3 \setminus K$ è non cpt $\Rightarrow$ non è $|K|$ con K compl. simpl.

però $S^3 \setminus K \simeq S^3 \setminus \mathring{U}$ $\qquad$ U = intorno tubolare chiuso di K:

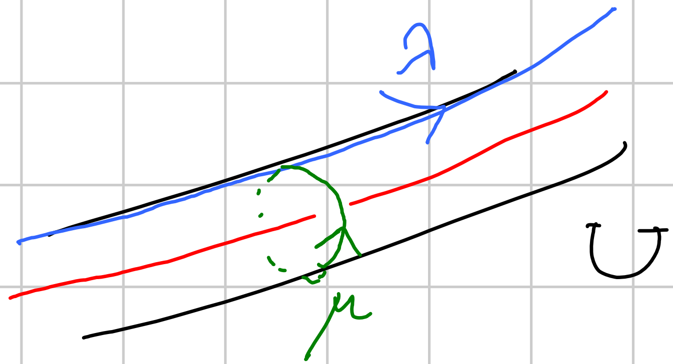




$U \cong S^1 \times D^2$
con $K \leftrightarrow S^1 \times \{0\}$.

Chiamo $E = S^3 \setminus \mathring{U}$
$T = E \cap U$ (toro)

$$H_1(T) = \mathbb{Z}_\mu \oplus \mathbb{Z}_\lambda$$



$\lambda = S^1 \times \{*\}$

$\mu = \{*\} \times \partial D^2$

M-V:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = H_2(S^3) & \longrightarrow & H_1(T) & \xrightarrow{\cong} & H_1(U) \oplus H_1(E) & \longrightarrow & H_1(S^3) = 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathbb{Z}_\mu \oplus \mathbb{Z}_\lambda & & \mathbb{Z}_\lambda & & \end{array}$$

$\Rightarrow H_1(E) \cong \mathbb{Z}$ anzi $H_1(E) = \mathbb{Z}\mu$.

Conseguenza:

$$\begin{aligned} H_1(T) &\xrightarrow{i_*} H_1(E) \\ \mu &\longmapsto \mu \\ \lambda &\longmapsto p\cdot\mu \end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(i_*) = \langle \lambda - p\cdot\mu \rangle$

dunque esiste una e una sola classe di omologia in $H_1(T)$ che è nulla in $H_1(E)$ ed è rappresentata da una curva semplice

ℓ chiusa in T