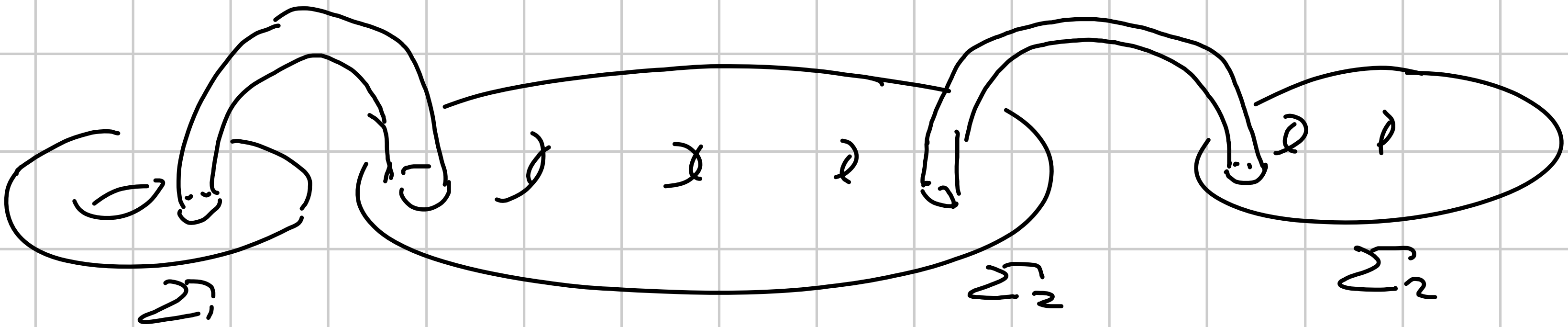
ETA 4/11/14

Fatto: $\#$ è associativa (ovvio: commutativa):
segue dalla indipendenza del triangolo incollato:

$$(\Sigma_1 \# \Sigma_2) \# \Sigma_3 \cong \Sigma_1 \# (\Sigma_2 \# \Sigma_3)$$



Visto: ogni superficie Σ è rappresentata da un poligono con lati accoppiati; accoppiamento dato da parola w con:

- per effetto degli accoppiamenti dei lati, tutti i vertici sono identificati
- non ci sono $\mathbb{P}^2$ sparsi: $x \ldots x \ldots \Longrightarrow xx \ldots$
- non ci sono T sparsi: $x \ldots y \ldots x^{-1} \ldots y^{-1} \ldots$

$$\Longrightarrow xyx^{-1}y^{-1} \ldots$$

Inoltre ho già visto che $\mathbb{P}^2 \# T = 3 \cdot \mathbb{P}^2$ quindi basta vedere che da (•) (••) (∴) segue che

Σ è # di qualche $\mathbb{P}^2$ e qualche T, cioè che

lungo w si vedono solo xx e $xyx^{-1}y^{-1}$ –

Per assurdo: ho

$$x \dots \quad x^{-1} \dots$$

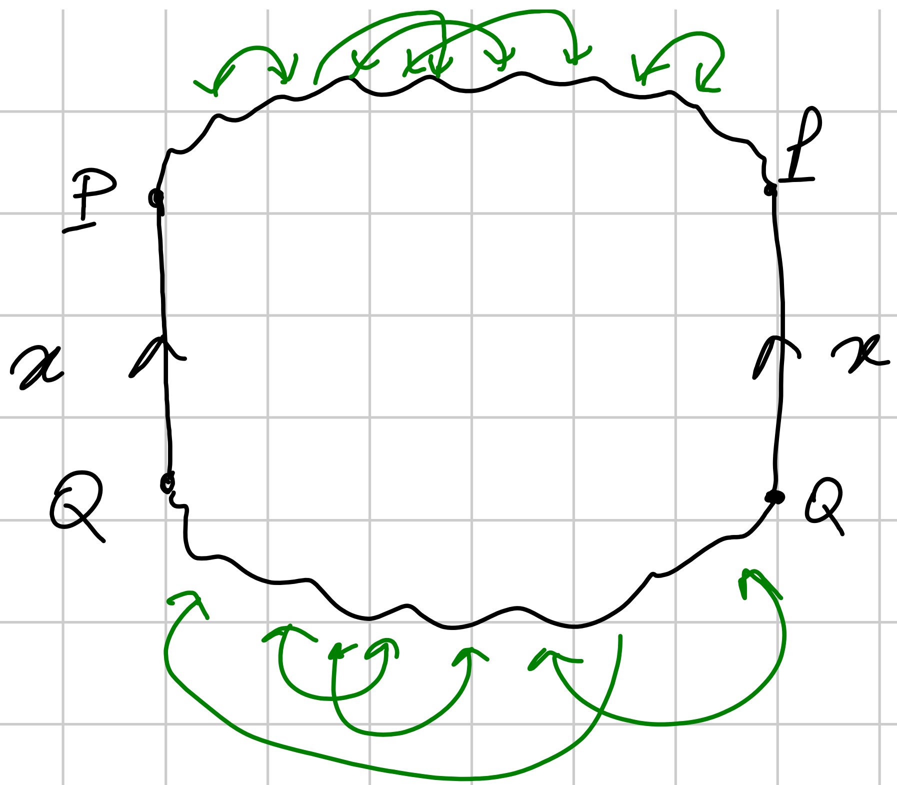
che non sono in config. $x \dots y \dots x^{-1} \dots y^{-1} \dots$

cioè (grazie a (••) e (∴)):

$$x \underbrace{\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\substack{\text{se c'è } y \text{ c'è} \\ \text{o } yy \text{ o anche } y^{-1}}}}_{\substack{\text{tutti accoppiati} \\ \text{tra loro}}} \qquad x^{-1} \underbrace{\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{stesso}}}_{\text{stesso}}$$

nessun accoppiamento

$\Longrightarrow$



$\Longrightarrow Q \neq P$

contraddice

(*)

$\boxtimes$

Proprietà fondamentali (assiomatiche)

del funtore omologia.

Def: omologia relativa: $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ sottocompl. simpl.

$$C_n(\mathcal{K},\mathcal{L}) = \langle \sigma : \sigma \in \mathcal{K}^{[n]} \setminus \mathcal{L}^{[n]} \rangle$$

$$\partial_n^{(\mathcal{K},\mathcal{L})}(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathcal{K}^{[n-1]} \setminus \mathcal{L}^{[n-1]}} \varepsilon(\sigma,\tau)\cdot \tau.$$

Ovvio: $\partial_{n-1}^{(\mathcal{K},\mathcal{L})} \circ \partial_n^{(\mathcal{K},\mathcal{L})} = 0$

$\Rightarrow$ ho $H_n(K,L)$ —

Fatti: •) Ad orientazione fissata c'è un isomorfismo canonico passando a sottocomplessi

••) Se $f:(K,L)\to(A,B)$ è simpliciale cioè f è simpliciale e $f(L)\subset B$ allora $f_*: H_*(K,L)\to H_*(A,B)$ è ben def e dipende solo dalla classe di omotopia relativa: $f_0 \simeq f_1$ se esiste

$F : K \times [0,1] \to A$ con $F(\cdot, 1) = f_1$

e $F(L \times [0,1]) \subset B$ _

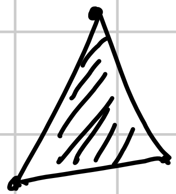
<u>Cor</u>: $H_*(X,A)$ è ben def. a meno di equivalenza omotopica di (X,A)

(in particolare a meno di omeo)

— vale per (X,A) omeomorfa a $(|K|, |L|)$

con K compl. simpl e $L \subset K$ sottocomplesso _

Oss: Non è vero che $H_n(K,L)$ dipende solo dal tipo di omotopia di $|K|\setminus|L|$ né di $|K|\setminus|L|$: infatti

$K =$  $\qquad L = \partial K$

$$C_*(K,L) \qquad \overset{3}{0} \longrightarrow \overset{2}{\mathbb{Z}} \longrightarrow \overset{1}{0} \longrightarrow \overset{0}{0} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow H_n(K,L) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n=2 \\ 0 & \text{se } n \neq 2 \end{cases}$$

Invece $|K| \setminus |L| \simeq pt$ $\qquad \overline{|K| \setminus |L|} \simeq pt$

$\Rightarrow$ hanno

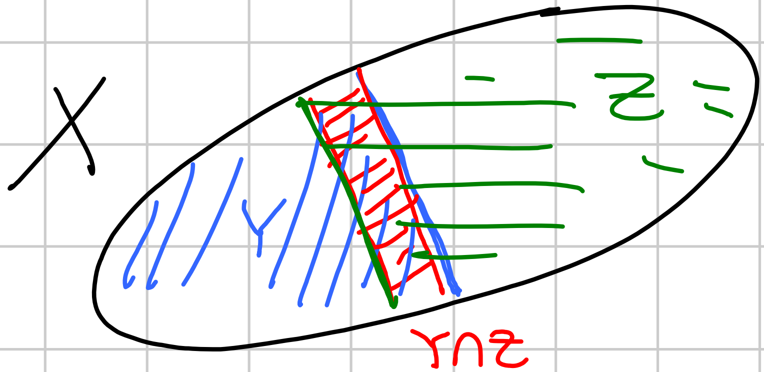
$$H_n = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ:

ESCISSIONE (excision):

$X = Y \cup Z \Rightarrow H_n(X, Z) \cong H_n(Y, Y \cap Z)$

(se (X,Z) e $(Y, Y\cap Z)$ sono omeo a complessi simpl.)

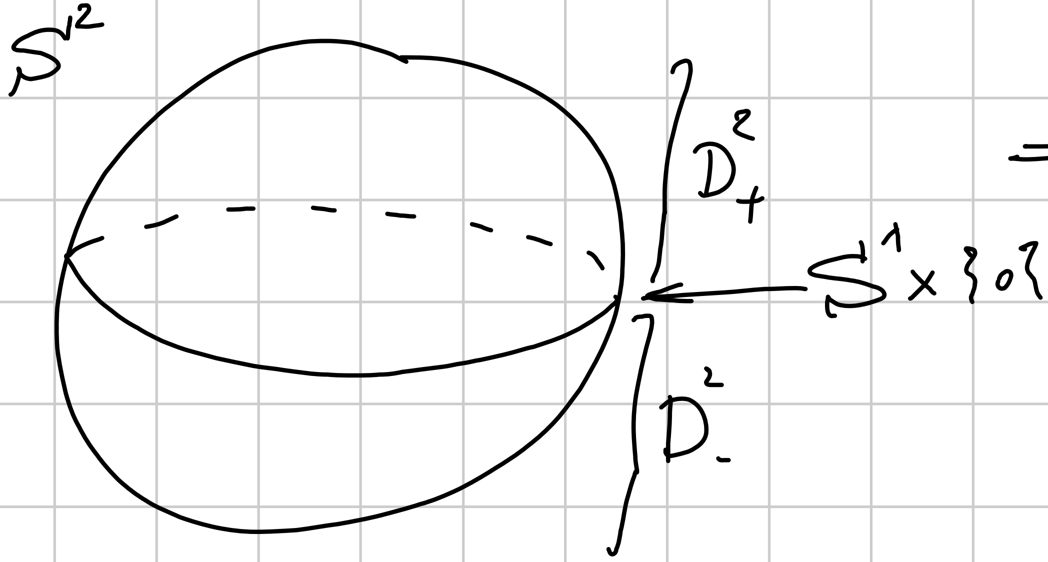


$$C_n(X,Z) =$$
$$= \mathbb{Z}\langle X^{[n]} \setminus Z^{[n]} \rangle$$
$$= \mathbb{Z}\langle Y^{[n]} \setminus (Y\cap Z)^{[n]} \rangle$$

e i bordi sono uguali ✓ $\boxtimes$

Es: $S^n = D^n_+ \cup D^n_-$

$$D^n_+ \cap D^n_- = S^{n-1} \times \{0\}$$



$$\Rightarrow H_k(S^n, D^n) \cong H_k(D^n, S^{n-1})$$

LES (long exact sequence – successione esatta lunga)

Esiste una successione esatta, dati (X, A) e posto

$i : (A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset) \qquad p : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$

$$\ldots \to H_n(A) \xrightarrow{i_{n_*}} H_n(X) \xrightarrow{p_{n_*}} H_n(X, A) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(A) \to \ldots$$

<u>Oss</u>: $0 \to A \xrightarrow{i} B \to \ldots$ è esatta significa i 1-1

$\ldots A \xrightarrow{p} B \to 0$ è esatta significa p surg

<u>Def</u>: $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ si dice

esatta corta e in tal caso p induce un isomorf. tra B/A e C (con $B/A = B/i(A)$) .

<u>Def</u>: una successione esatta di mappe tra complessi di catene è una mappa tra complessi di catene che è esatta a ogni livello:

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{C}^{(n+1)} \xrightarrow{f^{(n+1)}} \mathcal{C}^{(n)} \xrightarrow{f^{(n)}} \mathcal{C}^{(n-1)} \longrightarrow \cdots$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$\left(C_n^{(n)} \right)_{n=0}^{+\infty}$$

con

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n^{(n+1)} \arrow[r, "f_n^{(n+1)}"] \arrow[d, "\partial_n^{(n+1)}"] & C_n^{(n)} \arrow[r, "f_n^{(n)}"] \arrow[d, "\partial_n^{(n)}"] & C_n^{(n-1)} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n^{(n-1)}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n-1}^{(n+1)} \arrow[r, "f_{n-1}^{(n+1)}"] & C_{n-1}^{(n)} \arrow[r, "f_{n-1}^{(n)}"] & C_{n-1}^{(n-1)} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

con quadrati commutativi e righe esatte.

<u>Oss</u>: Se $L \subset K$ è sottocomplesso simpl.

$$0 \longrightarrow C(\mathcal{L}) \longrightarrow C(\mathcal{K}) \longrightarrow C(\mathcal{K},\mathcal{L}) \longrightarrow 0$$

$$\sigma \longmapsto \sigma \qquad \sigma \longmapsto \sigma$$

è una successione esatta corta di mappe tra complessi di catene.

Dunque LES in H_* segue da:

Teo: se $0 \to \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{C}'' \to 0$

è una succ. esatta corta di mappe tra complessi di catene allora c'è una successione esatta lunga

$$\cdots \to H'_n \xrightarrow{i_{n*}} H_n \xrightarrow{p_{n*}} H''_n \xrightarrow{\partial_n} H'_{n-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & \| & \| \\ H_n(\mathcal{C}') & H_n(\mathcal{C}) & H_n(\mathcal{C}'') \end{array}$$

Dim: 1) $H'_n \xrightarrow{i_{n*}} H_n \xrightarrow{p_{n*}} H''_n$ è esatta.

$\mathrm{Im}(i_{n*}) \subset \mathrm{Ker}(p_{n*})$ cioè $p_{n*} \circ i_{n*} = 0$

ovvio poiché $p_{n*} \circ i_{n*} = (p_n \circ i_n)_*$ e $p_n \circ i_n = 0$.

Viceversa supponiamo $p_{n*}([z]) = 0 \in H''_n$

cioè $[p_n(z)] = 0$, cioè $p_n(z) = \partial''_{n+1} w$

con $w \in C''_{n+1}$.

"diagram chasing"

$$\begin{tikzcd}
 & C_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{n+1}"] & 0 \\
C'_n \arrow[r, "i_n"] & C_n \arrow[r, "p_n"] & C''_n &
\end{tikzcd}$$

$$v \longmapsto z - \partial_{n+1} u$$

$$\varphi_n(z-\partial_{n+1}u) = \partial''_{n+1}w - \varphi_n(\partial_{n+1}u)$$
$$= (\partial''_{n+1}\circ\varphi_{n+1})(u) - (\varphi_n\circ\partial_{n+1})(u)$$
$$= 0 \quad (\text{diag. comm.})$$

$\Longrightarrow$ $\qquad z-\partial_{n+1}u = i_n(v)$

(esattezza in C_n)

$$\Longrightarrow [z] = [z-\partial_{n+1}u] = i_{n*}([v])$$

(però devo vedere che $\partial'_n v = 0$ perché $[v]$ abbia senso:

$$
\begin{tikzcd}
 & C'_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & C_n \arrow[d, "\partial_n"] \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1}
\end{tikzcd}
$$

basta vedere che $i_{n-1}(\partial'_n v) = 0$ ma

$i_{n-1}(\partial'_n v) = \partial_n(i_n(v)) = \partial_n(z - \partial_{n+1}(u))$

$$= \underbrace{\partial_n z}_{0} - \underbrace{\partial_n(\partial_{n+1}(u))}_{0}$$

$z \in Z_n$

2) (Voglio: $\dots \to H_n' \xrightarrow{i_*} H_n \xrightarrow{p_*} H_n'' \xrightarrow{d_n} H_{n-1}'$)

costruzione di d_n : Sia $z \in Z_n''$;

esiste $w \in C_n$ con $z = p_n(w)$; ora

$p_{n-1}(\partial_n w) = \partial_n''(p_n(w)) = \partial_n''(z) = 0$

$(z \in Z_n'')$

$\Longrightarrow \exists u \in C_{n-1}'$ t.c.

$\partial_m w = i_{m-1}(u)$

$$
\begin{tikzcd}
 & {}_{w}C_m \arrow[r, "p_m"] \arrow[d, "\partial_m"] & {}_{z}C''_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_m"] & 0 \\
{}_{u}C'_{m-1} \arrow[r, "i_{m-1}"] & C_{m-1} \arrow[r, "p_{m-1}"] & C''_{m-1} &
\end{tikzcd}
$$

Voglio definire $d_m([z]) = [u]$: devo vedere che $\partial'_{m-1} u = 0$ e che è ben def ;

$$
\begin{tikzcd}
u \in C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "\partial'_{n-1}"] & C_{n-1} \ni \partial_n w \arrow[d, "\partial_{n-1}"] \\
0 \arrow[r] & C'_{n-2} \arrow[r, "i_{n-2}"] & C_{n-2}
\end{tikzcd}
$$

$$i_{n-2}(\partial'_{n-1} u) = \partial_{n-1}(\partial_n w) = 0 \implies \partial'_{n-1} u = 0 .$$

Buona def: (indipendenza da w e da z come rappresentante di $[z]$):

Facile vedere che se uso w_j, u_j per definire $d_n([z_j])$ per $j=1,2$ posso usare w_1+w_2, u_1+u_2 per definire $d_n([z_1+z_2])$

$\Longrightarrow$ basta verificare che se $[z]=0$ e uso w, u per definire $d_n([z])$ allora $[u]=0$.

qualunque de cui indipendenza

Ipotesi $[z]=0$; $d_n([z])$ via w, u:

$z = \partial''_{n+1}(\alpha)$; ora

$\alpha = p_{n+1}(\gamma)$ e

$$
p_n(w - \partial_{n+1}\gamma) =
$$

$$
= \underbrace{p_n(w)}_{z} - \underbrace{\partial''_{n+1} \underbrace{p_{n+1}(\gamma)}_{\alpha}}_{z}
$$

$$
= 0
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \gamma\; C_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & \alpha\; C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{n+1}"] & 0 \\
 & \beta\; C'_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & w\; C_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & z\; C''_n & \\
0 \arrow[r] & u\; C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1} & &
\end{tikzcd}
$$

$$\Rightarrow \quad w - \partial_{n+1}\gamma = i_n(\beta)$$

e $\quad i_{n-1}(\partial'_n\beta - u) = \partial_n i_n(\beta) - i_{n-1}(u)$

$$= \partial_n(w - \partial_{n+1}\gamma) - i_{n-1}(u)$$

$$= \partial_n w - 0 - i'_{n-1}(u)$$

ma $\quad i_{n-1}(u) = \partial_n w \Longrightarrow u = \partial'_n\beta \Rightarrow [u] = 0$.

3) Esattezza di: $\quad H_n \xrightarrow{p_{n*}} H''_n \xrightarrow{d_n} H'_{n-1}$

3e) $\mathrm{Im}(p_{n*}) \subset \mathrm{Ker}(d_n)$:

$[z] \in \mathrm{Im}(p_{n*}) \Rightarrow z = p_n(w)$ con $\partial_n w = 0$

ma allora nella def. di $p_n([z])$ uso tale

w e quindi posso usare $u = 0$:

$$\begin{tikzcd}
 & {}_{w}C_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & {}_{z}C''_n \arrow[r] & 0 \\
{}_{0}C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & {}_{0}C_{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

3b) $\mathrm{Ker}(d_n) \subset \mathrm{Im}(p_{n*})$.

Supponiamo $d_n([z]) = 0$ cioè:

$z = p_n(w)$, $\partial_n w = i_{n-1}(u)$ e $[u] = d_n([z])$

nulla $\Longrightarrow$ $u = \partial'_n \alpha$:

$$\begin{tikzcd}
{}_{\alpha}C'_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & {}_{w}C_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & {}_{z}C''_n \arrow[r] & 0 \\
{}_{u}C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1}
\end{tikzcd}$$

(sarebbe finita se w fosse un ciclo: invece proviamo che z differisce da un ciclo per un bordo, da cui $[z] \in \mathrm{Im}(p_{M_*})$):

$$\partial_n(w - i_n\alpha) = \partial_n w - i_{n-1}\partial'_n\alpha = \partial_n w - i_{n-1}(u) = 0$$

$\Longrightarrow [w - i_n\alpha] \in H_n$ ha immagine $[z]$ tramite p_{M_*} cioè

$$p_{M_*}([w - i_n\alpha]) = [z].$$

4) Esattezza in H'_{n-1} ...