

# La dimensione in geometria

Emanuele Paolini

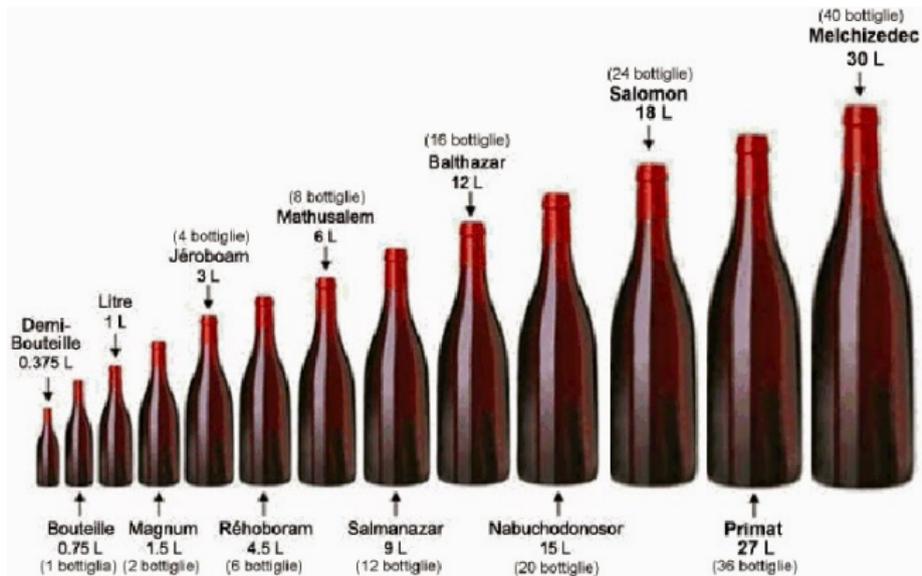
Università di Firenze → Pisa

Piombino, 18 novembre 2016

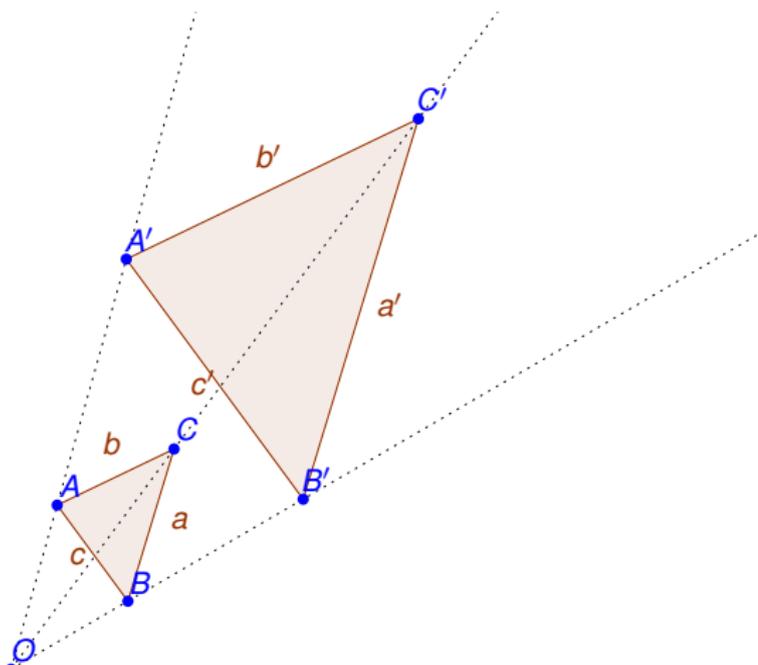
# Problemi di scala

## Problema

*Una normale bottiglia di vino ha una capacità di  $3/4$  di litro.  
Una bottiglia di tipo Jéroboam contiene invece 3 litri. Quanto è  
il rapporto tra le altezze delle due bottiglie?*



# Similitudine / riscaldamento



$$a' = qa, \quad b' = qb, \quad c' = qc$$

# Riscaldamento di un cilindro

## Problema

Le “tuberine” vengono normalmente confezionate in un cilindro di altezza 18cm e diametro 9cm. Una confezione contiene 50g di patatine. Se le patatine venissero confezionate in un cilindro di dimensioni doppie, quanti grammi di patatine ci aspetteremmo di trovare?

$$v = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 H}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = \frac{\frac{\pi}{4} (qd)^2 (qh)}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = q^3 = 8$$

Peso delle patatine nel cilindro grande:  $8 \cdot 50g = 400g$ .

# Riscaldamento di un cilindro

## Problema

Le “tuberine” vengono normalmente confezionate in un cilindro di altezza 18cm e diametro 9cm. Una confezione contiene 50g di patatine. Se le patatine venissero confezionate in un cilindro di dimensioni doppie, quanti grammi di patatine ci aspetteremmo di trovare?

$$v = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 H}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = \frac{\frac{\pi}{4} (qd)^2 (qh)}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = q^3 = 8$$

Peso delle patatine nel cilindro grande:  $8 \cdot 50g = 400g$ .

# Riscaldamento di un cilindro

## Problema

Le “tuberine” vengono normalmente confezionate in un cilindro di altezza 18cm e diametro 9cm. Una confezione contiene 50g di patatine. Se le patatine venissero confezionate in un cilindro di dimensioni doppie, quanti grammi di patatine ci aspetteremmo di trovare?

$$v = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 H}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = \frac{\frac{\pi}{4} (qd)^2 (qh)}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = q^3 = 8$$

Peso delle patatine nel cilindro grande:  $8 \cdot 50g = 400g$ .

# Riscaldamento di un cilindro

## Problema

Le “tuberine” vengono normalmente confezionate in un cilindro di altezza 18cm e diametro 9cm. Una confezione contiene 50g di patatine. Se le patatine venissero confezionate in un cilindro di dimensioni doppie, quanti grammi di patatine ci aspetteremmo di trovare?

$$v = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 H}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = \frac{\frac{\pi}{4} (qd)^2 (qh)}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = q^3 = 8$$

Peso delle patatine nel cilindro grande:  $8 \cdot 50g = 400g$ .

## Riscaldamento di altri solidi geometrici

- cubo:  $v = \ell^3$

$$\frac{V}{v} = \frac{(q\ell)^3}{\ell^3} = \frac{q^3\ell^3}{\ell^3} = q^3,$$

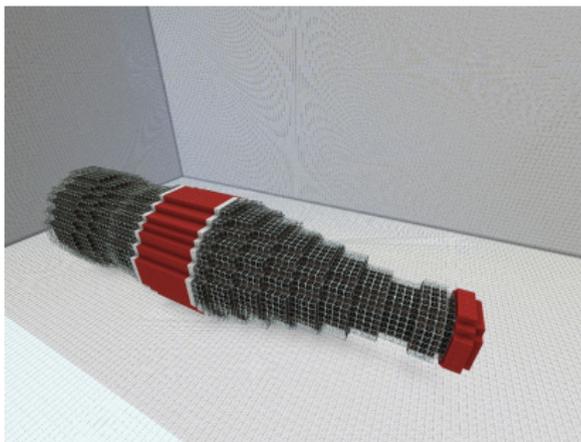
- parallelepipedo:  $v = abc$

$$\frac{V}{v} = \frac{(qa)(qb)(qc)}{abc} = q^3,$$

- sfera  $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{4}{3}(qr)^3}{\frac{4}{3}r^3} = q^3.$$

## Definizione di volume



$$v(B) = N\ell^3$$

$$v(qB) = N(q\ell)^3 = Nq^3\ell^3 = q^3v(B)$$

# Dimensione di una misura

$$m(qF) = q^d m(F).$$

- lunghezza:  $d = 1$
- area:  $d = 2$
- volume:  $d = 3$

# Bottiglia

## Problema

Una normale bottiglia di vino ha una capacità di  $3/4$  di litro.  
Una bottiglia di tipo Jéroboam contiene invece 3 litri. Quanto è il rapporto tra le altezze delle due bottiglie?

$$J = qB \quad \Rightarrow \quad 3\ell = v(J) = q^3 \cdot v(B) = q^3 \cdot \frac{3}{4}\ell \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[3]{4}.$$

$$\frac{H}{h} = \frac{qh}{h} = q = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$$

# Bottiglia

## Problema

Una normale bottiglia di vino ha una capacità di  $3/4$  di litro.  
Una bottiglia di tipo Jéroboam contiene invece 3 litri. Quanto è il rapporto tra le altezze delle due bottiglie?

$$J = qB \quad \Rightarrow \quad 3\ell = v(J) = q^3 \cdot v(B) = q^3 \cdot \frac{3}{4}\ell \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[3]{4}.$$

$$\frac{H}{h} = \frac{qh}{h} = q = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$$

# Bottiglia

## Problema

Una normale bottiglia di vino ha una capacità di  $3/4$  di litro.  
Una bottiglia di tipo Jéroboam contiene invece 3 litri. Quanto è il rapporto tra le altezze delle due bottiglie?

$$J = qB \quad \Rightarrow \quad 3\ell = v(J) = q^3 \cdot v(B) = q^3 \cdot \frac{3}{4}\ell \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[3]{4}.$$

$$\frac{H}{h} = \frac{qh}{h} = q = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$$

# Esercizi



## Problema

*Daniele ha disegnato il circuito di Monza in scala 1:1000 sul pavimento della terrazza. Sapendo che il circuito reale è lungo 5793 m, quanto sarà lungo il circuito disegnato da Daniele?*

$$\frac{1}{1000} \cdot 5793m = 5,793m$$

# Esercizi



## Problema

*Daniele ha disegnato il circuito di Monza in scala 1:1000 sul pavimento della terrazza. Sapendo che il circuito reale è lungo 5793 m, quanto sarà lungo il circuito disegnato da Daniele?*

$$\frac{1}{1000} \cdot 5793m = 5,793m$$

# Esercizi



## Problema

*Daniele ha disegnato il circuito di Monza in scala 1:1000 sul pavimento della terrazza. Contando le piastrelle Daniele ha determinato che l'area racchiusa dal circuito in scala è circa  $1,2 \text{ m}^2$ . Quanti metri quadri racchiude il vero circuito?*

$$1000^2 \cdot 1,2 \text{ m}^2 = 1.200.000 \text{ m}^2$$

# Esercizi



## Problema

*Daniele ha disegnato il circuito di Monza in scala 1:1000 sul pavimento della terrazza. Contando le piastrelle Daniele ha determinato che l'area racchiusa dal circuito in scala è circa  $1,2 \text{ m}^2$ . Quanti metri quadri racchiude il vero circuito?*

$$1000^2 \cdot 1,2 \text{ m}^2 = 1.200.000 \text{ m}^2$$

## Esercizi



### Problema

*Le macchinine che Daniele usa per giocare sono invece in scala 1 : 50. Se per dipingere la macchinina Daniele utilizza 1 tubetto di vernice rossa, quanti tubetti gli sarebbero necessari per dipingere la macchina vera?*

$$50^2 \cdot 1 = 2500.$$

# Omino di cera



## Problema

*Usando un litro di cera modello un omino che raffigura me stesso. Quanto verrà alto l'omino?*

$$V = 80\ell = 80v = v/q^3 \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt[3]{80}}$$

$$h = q \cdot H = \frac{1.90 \text{ m}}{\sqrt[3]{80}} \approx 0,44 \text{ m}$$

# Omino di cera



## Problema

*Usando un litro di cera modello un omino che raffigura me stesso. Quanto verrà alto l'omino?*

$$V = 80\ell = 80v = v/q^3 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{\sqrt[3]{80}}$$

$$h = q \cdot H = \frac{1.90 \text{ m}}{\sqrt[3]{80}} \approx 0,44 \text{ m}$$

# Omino di cera



## Problema

*Usando un litro di cera modello un omino che raffigura me stesso. Quanto verrà alto l'omino?*

$$V = 80\ell = 80v = v/q^3 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{\sqrt[3]{80}}$$

$$h = q \cdot H = \frac{1.90 \text{ m}}{\sqrt[3]{80}} \approx 0,44 \text{ m}$$

# Formato ISO 216

## Problema

*Qual è il rapporto tra le lunghezze dei due lati di un foglio A4?  
Sapendo che il formato A0 ha un'area di 1 metro quadro,  
calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.*

$$q^2 a = 2a, \quad q = \sqrt{2}.$$

$$1 m^2 = 2^4 \cdot a = 2^4 \cdot x \cdot \sqrt{2}x = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}} m = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} m$$

$$x = 0,2102 m = 21,02 cm \quad \sqrt{2} \cdot x = 29,73 cm.$$

# Formato ISO 216

## Problema

*Qual è il rapporto tra le lunghezze dei due lati di un foglio A4?  
Sapendo che il formato A0 ha un'area di 1 metro quadro,  
calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.*

$$q^2 a = 2a, \quad q = \sqrt{2}.$$

$$1 \text{ m}^2 = 2^4 \cdot a = 2^4 \cdot x \cdot \sqrt{2}x = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}} \text{ m} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} \text{ m}$$

$$x = 0,2102 \text{ m} = 21,02 \text{ cm} \quad \sqrt{2} \cdot x = 29,73 \text{ cm}.$$

# Formato ISO 216

## Problema

*Qual è il rapporto tra le lunghezze dei due lati di un foglio A4?  
Sapendo che il formato A0 ha un'area di 1 metro quadro,  
calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.*

$$q^2 a = 2a, \quad q = \sqrt{2}.$$

$$1 \text{ m}^2 = 2^4 \cdot a = 2^4 \cdot x \cdot \sqrt{2}x = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}} \text{ m} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} \text{ m}$$

$$x = 0,2102 \text{ m} = 21,02 \text{ cm} \quad \sqrt{2} \cdot x = 29,73 \text{ cm}.$$

# Formato ISO 216

## Problema

*Qual è il rapporto tra le lunghezze dei due lati di un foglio A4?  
Sapendo che il formato A0 ha un'area di 1 metro quadro,  
calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.*

$$q^2 a = 2a, \quad q = \sqrt{2}.$$

$$1 \text{ m}^2 = 2^4 \cdot a = 2^4 \cdot x \cdot \sqrt{2}x = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}} \text{ m} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} \text{ m}$$

$$x = 0,2102 \text{ m} = 21,02 \text{ cm} \quad \sqrt{2} \cdot x = 29,73 \text{ cm}.$$

# Formato ISO 216

## Problema

*Qual è il rapporto tra le lunghezze dei due lati di un foglio A4?  
Sapendo che il formato A0 ha un'area di 1 metro quadro,  
calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.*

$$q^2 a = 2a, \quad q = \sqrt{2}.$$

$$1 \text{ m}^2 = 2^4 \cdot a = 2^4 \cdot x \cdot \sqrt{2}x = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}} \text{ m} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} \text{ m}$$

$$x = 0,2102 \text{ m} = 21,02 \text{ cm} \quad \sqrt{2} \cdot x = 29,73 \text{ cm}.$$

## misura 0-dimensionale



### Problema

*La macchinina di formula uno di Daniele è in scala 1 : 50.  
Sapendo che la macchinina vera ha quattro ruote, quante ruote  
ha la macchinina in scala?*

$$m(qX) = q^0 m(X) = m(X)$$

## misura 0-dimensionale

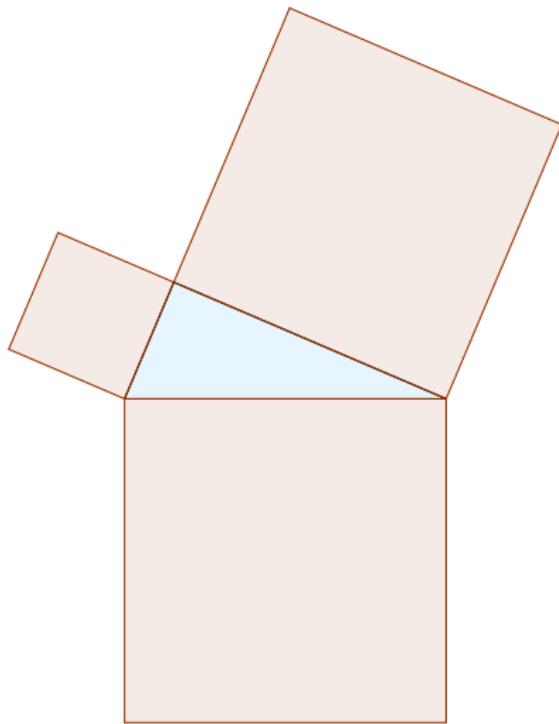


### Problema

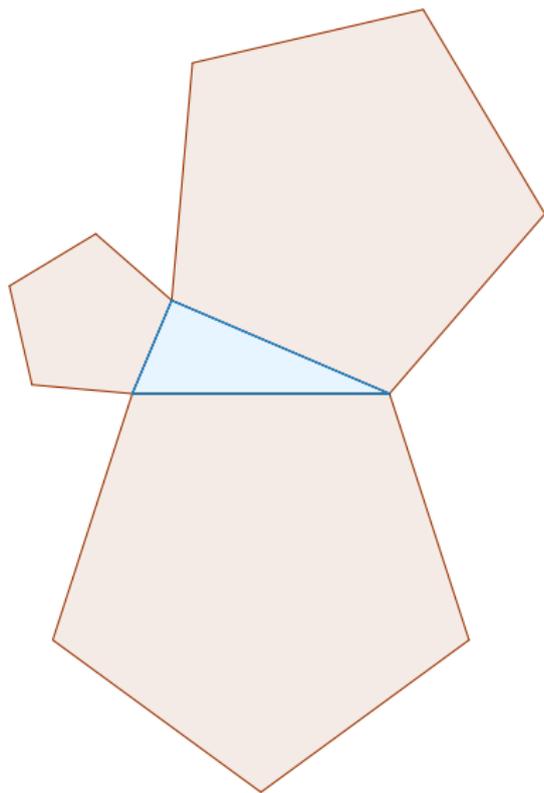
*La macchinina di formula uno di Daniele è in scala 1 : 50.  
Sapendo che la macchinina vera ha quattro ruote, quante ruote  
ha la macchinina in scala?*

$$m(qX) = q^0 m(X) = m(X)$$

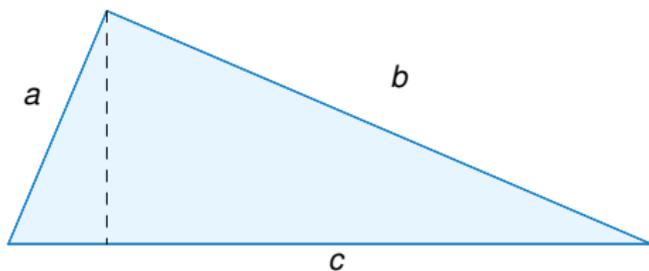
# Il teorema di Pitagora



# Il teorema di Pitagora



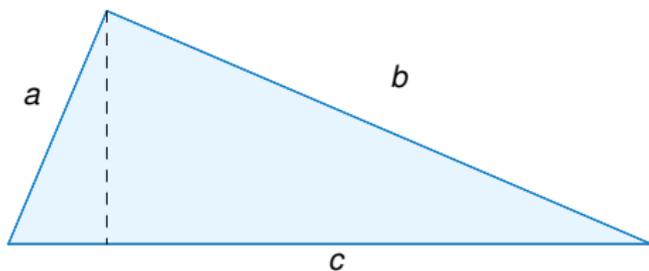
# Teorema di Pitagora



$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 \mathcal{A} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

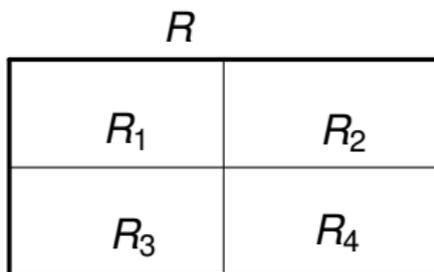
# Teorema di Pitagora



$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 \mathcal{A} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

## figure autosimilari



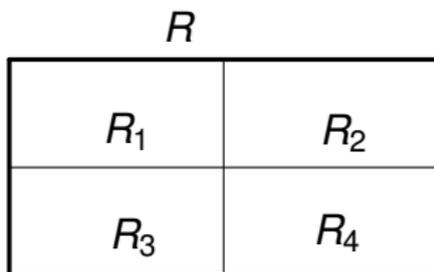
$$m(R) = m(R_1) + m(R_2) + m(R_3) + m(R_4) = 4m(R/2) = \frac{4}{2^d}m(R).$$

$$1 = \frac{4}{2^d}, \quad d = 2$$

$C$ =cubo

$$m(C) = 8m(C/2) = \frac{8}{2^d}m(C)$$

## figure autosimilari



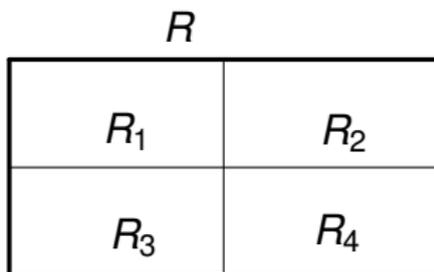
$$m(R) = m(R_1) + m(R_2) + m(R_3) + m(R_4) = 4m(R/2) = \frac{4}{2^d}m(R).$$

$$1 = \frac{4}{2^d}, \quad d = 2$$

$C$ =cubo

$$m(C) = 8m(C/2) = \frac{8}{2^d}m(C)$$

## figure autosimilari



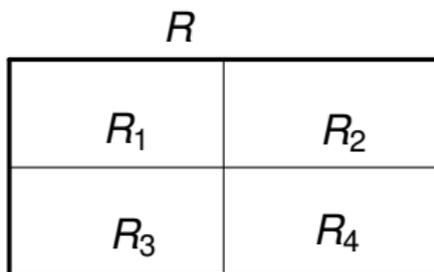
$$m(R) = m(R_1) + m(R_2) + m(R_3) + m(R_4) = 4m(R/2) = \frac{4}{2^d}m(R).$$

$$1 = \frac{4}{2^d}, \quad d = 2$$

$C$ =cubo

$$m(C) = 8m(C/2) = \frac{8}{2^d}m(C)$$

## figure autosimilari



$$m(R) = m(R_1) + m(R_2) + m(R_3) + m(R_4) = 4m(R/2) = \frac{4}{2^d}m(R).$$

$$1 = \frac{4}{2^d}, \quad d = 2$$

$C$ =cubo

$$m(C) = 8m(C/2) = \frac{8}{2^d}m(C)$$

# La curva di Koch



$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d}m(K)$$

$$1 = \frac{4}{3^d}, \quad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

# La curva di Koch



$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d}m(K)$$

$$1 = \frac{4}{3^d}, \quad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

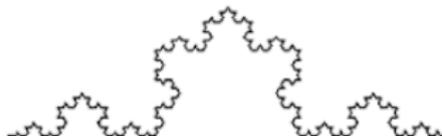
# La curva di Koch



$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d}m(K)$$

$$1 = \frac{4}{3^d}, \quad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

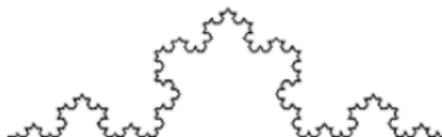
# La curva di Koch



$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d}m(K)$$

$$1 = \frac{4}{3^d}, \quad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

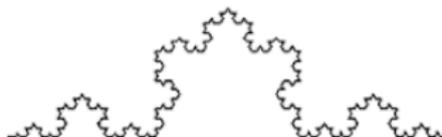
# La curva di Koch



$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d}m(K)$$

$$1 = \frac{4}{3^d}, \quad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

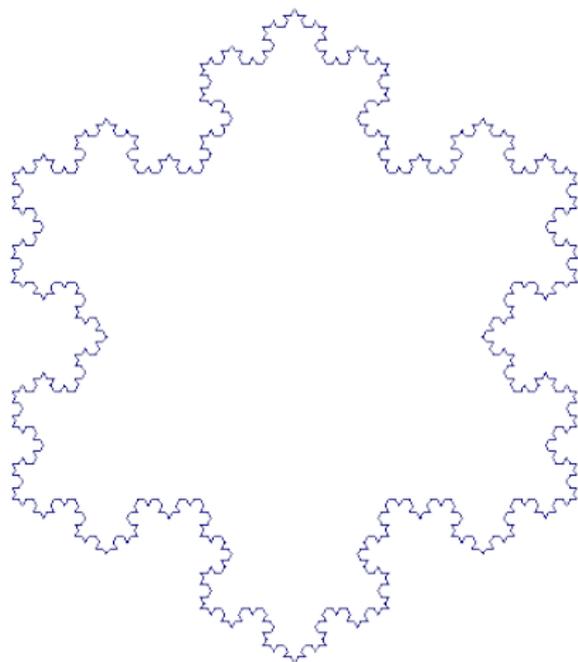
# La curva di Koch



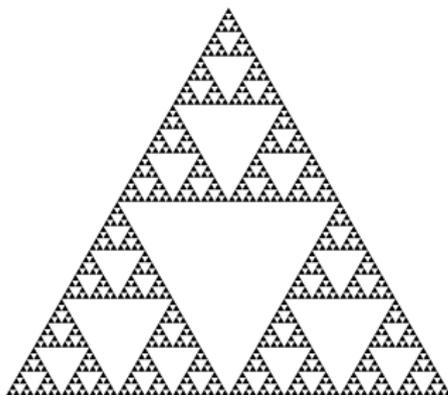
$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d}m(K)$$

$$1 = \frac{4}{3^d}, \quad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

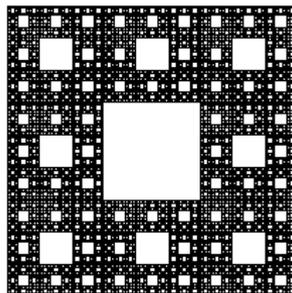
# Fiocco di neve di Koch



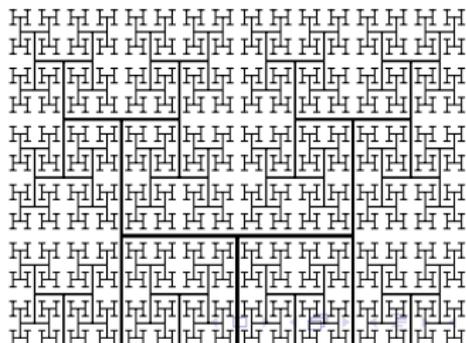
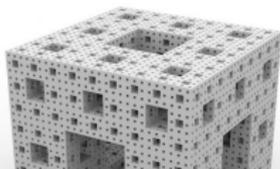
# Frattali autosimilari



(a) triangolo di Sierpinski  
 $d = \log_2 3$



(b) tappeto di Sierpinski  
 $d = \log_3 8$



# Frattali in natura

