

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE  
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Matematica

Anno accademico 2005/2006

Relazione finale

di Letizia Ulivi

**Frattali autosimili**

relatore: Emanuele Paolini

*“Why is geometry often described as ‘cold’ and ‘dry’? One reason lies in its inability to describe the shape of a cloud, a mountain, a coastline or a tree. Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line”*

Benoit B. Mandelbrot

Così Mandelbrot, il padre fondatore della teoria dei frattali, ma non lo scopritore vero e proprio, nel suo libro *“The Fractal Geometry of Nature”*, descrive l’inadeguatezza della geometria euclidea nella descrizione della natura.

Prima dello sviluppo della geometria frattale, la natura veniva infatti vista e descritta come composizione di figure geometriche, eventualmente con qualche irregolarità. Galileo scriveva che “i caratteri con cui Dio ha scritto il grande Libro della Natura sono fatti di triangoli, cerchi e altre figure geometriche” e il pittore Paul Cezanne ripeteva ai suoi giovani allievi: “Ogni cosa in natura può essere vista come coni, cilindri e sfere”.

## La parola “Frattale”

Il termine frattale, introdotto nel 1975 dallo stesso Mandelbrot, deriva dal latino *“fractus”* che significa frammentato, riferendosi all’aspetto di questi insiemi.

In realtà non esiste una definizione generalmente accettata di *frattale*, mentre possiamo definire un *frattale autosimile* come un insieme formato da un’unione di sottoinsiemi simili all’originale (nel senso delle omotetie).

Tuttavia la geometria frattale non si occupa solo di oggetti esclusivamente matematici, come ad esempio il tappeto di Sierpinsky, essa ha avuto e continua ad avere una notevole influenza sul modo di vedere gli oggetti naturali (come può essere la felce di Barsnley).

L’esempio più famoso di frattale autosimile è la curva di Koch. Supponiamo di partire da un segmento, e procediamo per passi, ad ogni iterazione lavoriamo sulla curva che risulta dall’iterazione precedente. Ogni volta che si incontra un segmento, lo si sostituisce con una linea avente al centro un triangolo equilatero di lato  $\frac{1}{3}$ , mancante della base.

Si può provare che le curve così ottenute ad ogni passo, convergono ad una curva limite (che indicherò con  $K$ ). Questa è autosimile perché consiste di

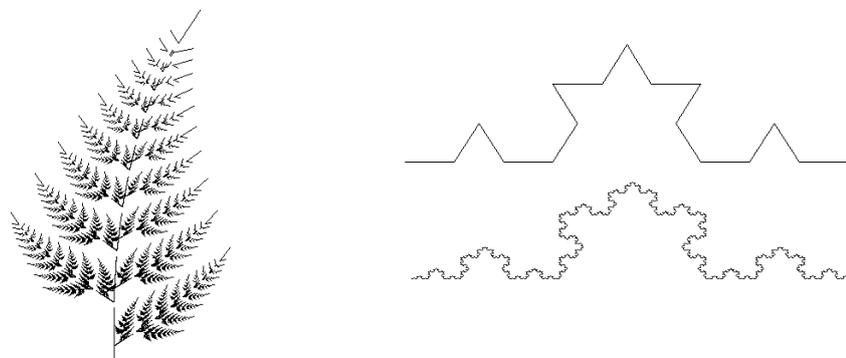


Figura 1: La felce di Barnsley e la curva di Koch riprodotte al computer.

quattro piccole copie di se stessa, ognuna delle quali è a sua volta costituita da quattro piccole copie di se, e così via. . .

## Introduzione

Diciamo che un insieme  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  è *invariante*, se esiste un insieme finito  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$  di contrazioni su  $\mathbb{R}^n$  tale che  $K = \bigcup_{i=1}^N T_i(K)$ . In tal caso si dice che  $K$  è invariante rispetto a  $\mathcal{T}$  (Definizione 2).

In realtà, l'insieme invariante  $K$  è determinato dallo stesso  $\mathcal{T}$ , infatti, dato l'insieme delle contrazioni, esiste un unico compatto  $K$  invariante rispetto a  $\mathcal{T}$ . Inoltre,  $K$  è il limite di una successione di insiemi  $A, T(A), T(T(A)), \dots$  (con  $T(\cdot) := \bigcup_{i=1}^N T_i(\cdot)$ ) costruita per ricorrenza tramite  $\mathcal{T}$ , a partire da un qualsiasi compatto  $A$ . (Teorema 8)

Tali affermazioni sono una conseguenza del teorema del punto fisso di Banach, applicato ad un opportuno spazio metrico. Questo teorema assicura infatti che una contrazione, se porta uno spazio metrico completo in se, ha sempre un unico punto fisso che è il limite di una successione per ricorrenza definita tramite la contrazione.

Visto che si tratta di insiemi, si va a lavorare sullo spazio costituito dai sottoinsiemi compatti e non vuoti di  $\mathbb{R}^n$ . La metrica che si usa è quella che viene chiamata “distanza di Hausdorff” (Definizione 4). Dimostrato che lo spazio metrico, fornito di tale distanza, è completo (Teorema 5), non resta che provare che la funzione  $\bigcup_{i=1}^N T_i(\cdot)$  è una contrazione (Teorema 6), proprio quella che fornisce il punto fisso, cioè l'insieme invariante.

Dal teorema di Banach segue anche che la successione costruita tramite la contrazione, a partire da un qualsiasi insieme iniziale compatto, converge sempre all'insieme invariante. È proprio questa proprietà che, attraverso un procedimento ricorsivo, permette di produrre al computer una rappresentazione grafica dei frattali.

È interessante considerare il caso particolare in cui le funzioni  $T_i$  siano similitudini di fattore  $\lambda_i < 1$ . Definita infatti la “dimensione similare” dell'insieme  $\mathcal{T}$  come l'unico  $D$  tale che  $\sum_i \lambda_i^D = 1$  (Definizione 10), si vedrà come questa è sempre maggiore o uguale alla dimensione di Hausdorff dell'invariante di  $\mathcal{T}$  (Proposizione 13). Inoltre, sotto opportune ipotesi, vale l'uguaglianza (Proposizione 14 e Teorema 16).

## Teorema di esistenza e unicità dell'invariante

Per maggiore generalità tratteremo il caso di un generico spazio metrico  $(X, d)$  e passeremo poi al caso  $X = \mathbb{R}^n$  nella sezione successiva.

**Definizione 1.** Dato  $(X, d)$  uno spazio metrico, definiamo  $\mathcal{B}(X) = \{C \subseteq X \text{ t.c. } C \neq \emptyset, C \text{ chiuso e limitato}\}$ .

**Definizione 2.** Sia  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$  un insieme finito di funzioni, definiamo  $T: \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X)$  come  $T(A) = \bigcup_{i=1}^N T_i(A)$ ,  $\forall A \in \mathcal{B}(X)$ . Diciamo che  $K \in \mathcal{B}(X)$  è *invariante rispetto a  $\mathcal{T}$*  se  $T(K) = K$ .

**Definizione 3.** Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $f: X \rightarrow X$ . Diciamo che  $f$  è una *contrazione* su  $X$  se esiste un numero reale  $\lambda < 1$  tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

**Definizione 4** (Distanza di Hausdorff). Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, per un punto  $x \in X$  e un insieme  $A \subseteq X$  non vuoto si definisce la *distanza di  $x$  da  $A$*  come

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Allora la *distanza di Hausdorff tra  $A$  e  $B$*  è definita per ogni elemento di  $\mathcal{B}(X)$ , come

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}.$$

Si vede facilmente che  $h$  è effettivamente una distanza su  $\mathcal{B}(X)$ . La dimostrazione del seguente teorema è riportata nell'Appendice 2.

**Teorema 5.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo. Allora anche  $(\mathcal{B}(X), h)$  lo è.*

**Teorema 6.**  *$T$  è una contrazione su  $\mathcal{B}(X)$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $A, B \in \mathcal{B}(X)$ . Ricordiamo che  $T(A) = \bigcup_{i=1}^N T_i(A)$  e  $T_i$  sono contrazioni su  $X$  di fattore  $\lambda_i < 1$ , cioè per ogni  $i \in \mathbb{N}$   $d(T_i(x), T_i(y)) \leq \lambda_i d(x, y) \forall x, y \in X$ . Notiamo, prima di tutto, che:

$$h \left( \bigcup_{i=1}^N T_i(A), \bigcup_{i=1}^N T_i(B) \right) \leq \max_{1 \leq i \leq N} h(T_i(A), T_i(B)).$$

Allora resta da mostrare:

$$h(T_i(A), T_i(B)) \leq \lambda_i h(A, B).$$

Per  $x \in A$  si ha

$$\begin{aligned} d(T_i(x), T_i(B)) &= \inf \{ d(T_i(x), T_i(y)) : y \in B \} \leq \inf \{ \lambda_i d(x, y) : y \in B \} \\ &= \lambda_i d(x, B) \leq \lambda_i h(A, B) \end{aligned}$$

quindi

$$\sup_{T_i(x) \in T_i(A)} d(T_i(x), T_i(B)) \leq \lambda_i h(A, B).$$

Analogamente:

$$\sup_{T_i(y) \in T_i(B)} d(T_i(y), T_i(A)) \leq \lambda_i h(A, B).$$

Da cui

$$h(T_i(A), T_i(B)) \leq \lambda_i h(A, B) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Segue quindi:

$$\begin{aligned} h(T(A), T(B)) &= h \left( \bigcup_{i=1}^N T_i(A), \bigcup_{i=1}^N T_i(B) \right) \leq \max_{1 \leq i \leq N} h(T_i(A), T_i(B)) \\ &\leq \left( \max_{1 \leq i \leq N} \lambda_i \right) h(A, B). \end{aligned}$$

□

Adesso non resta che enunciare il seguente teorema la cui dimostrazione è ben nota.

**Teorema 7** (di Banach del punto fisso). *Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e  $f: X \rightarrow X$  una contrazione su  $X$ , allora esiste ed è unico  $\bar{x} \in X$  punto fisso di  $f$ , cioè tale che  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ . Inoltre, qualunque sia il punto  $x_0 \in X$ , costruita la successione:  $\{x_{n+1} = f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , questa converge al punto fisso  $\bar{x}$ .*

Abbiamo ora tutti i requisiti necessari per comprendere e dimostrare il:

**Teorema 8.** *Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$  un insieme finito di contrazioni su  $X$ . Allora esiste ed è unico  $K \in \mathcal{B}(X)$  tale che  $K = T(K)$ . Inoltre, scelto un qualunque  $K_0 \in \mathcal{B}(X)$ , si ha  $T^n(K_0) \rightarrow K$  con la distanza di Hausdorff (dove  $T^1(K_0) := T(K_0)$ ,  $T^{n+1}(K_0) := T(T^n(K_0))$ ).*

*Dimostrazione.* Il teorema del punto fisso, applicato allo spazio metrico  $(\mathcal{B}(X), h)$ , che si è visto essere completo, e alla contrazione  $T: \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X)$  mostra che esiste un unico  $K$  punto fisso di  $T$ , cioè tale che  $T(K) = K$ , e per ogni  $K_0 \subseteq X$  non vuoto, chiuso e limitato,  $K_n = T^n(K_0) \rightarrow K$  rispetto ad  $h$ .  $\square$

## Dimensione degli insiemi invarianti autosimili

I frattali autosimili sono un classico esempio di insiemi con dimensione non intera. Daremo di seguito due definizioni di dimensione che vedremo essere strettamente legate tra loro: la *dimensione di Hausdorff* e la *dimensione similare*.

**Definizione 9.** Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico,  $E \subseteq X$ ,  $0 \leq s < \infty$  e  $\delta > 0$ , allora definiamo

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \omega_s \left[ \frac{\text{diam}(U_i)}{2} \right]^s : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \text{diam}(U_i) \leq \delta \right\}$$

dove

$$\omega_s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} \quad e \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Definiamo inoltre la *misura di Hausdorff* di  $E$  come:

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

e la *dimensione di Hausdorff* di  $E$  come:

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{0 \leq s < \infty : \mathcal{H}^s(E) = 0\}.$$

Una proprietà fondamentale, che useremo in seguito, è che se  $f$  è una similitudine di fattore  $\lambda$  vale  $\mathcal{H}^d(f(E)) = \lambda^d \mathcal{H}^d(E)$ .

Supponiamo, da ora in avanti, che le  $T_i$  siano similitudini di fattore  $\lambda_i < 1$ , cioè  $d(T_i(x), T_i(y)) = \lambda_i d(x, y)$ ,  $\forall x, y \in X$ .

Sia  $\gamma(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^t$ , allora  $\gamma(0) = N$  e  $\gamma(t) \searrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$ . Quindi esiste un unico  $D$  tale che  $\sum_{i=1}^N \lambda_i^D = 1$ .

**Definizione 10.** Se  $D$  è tale che  $\sum_{i=1}^N \lambda_i^D = 1$ ,  $D$  è chiamata la *dimensione similare* dell'insieme  $\mathcal{T}$ .

D'ora in avanti indicheremo sempre con  $D$  la dimensione similare di  $\mathcal{T}$  e con  $d = \dim_{\mathcal{H}}(K)$  la dimensione di Hausdorff dell'insieme invariante di  $\mathcal{T}$ .

**Esempio 11.** Per la curva di Koch,  $\lambda_i = \frac{1}{3}$  per  $i = 1, \dots, 4$ , quindi  $D$  è tale che  $4 \cdot \frac{1}{3^D} = 1$ , cioè  $D = \log_3 4 \simeq 1,262$ .

Si può dire che  $d = D$ ? In generale la risposta è no, come si vede dall'esempio seguente; risulta valida solo la disuguaglianza  $d \leq D$  (Proposizione 13).

**Esempio 12.** Consideriamo le due similitudini  $T_1, T_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $T_1(x) = \lambda x$ ,  $T_2(x) = 1 - \lambda(1 - x)$  con  $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ . Dalla relazione  $\lambda^D + \lambda^D = 1$  è facile determinare  $D = -\log_\lambda 2 > 1$ . D'altra parte si verifica facilmente che l'insieme  $K = [0, 1]$  è invariante e dunque  $d = \dim_{\mathcal{H}}(K) = 1$ . Dunque in questo caso  $D > d$ .

**Proposizione 13.** Sia  $K$  l'insieme invariante di  $\mathcal{T}$  e  $\dim_{\mathcal{H}}(K) = d$ , allora  $\mathcal{H}^D(K) < \infty$  e quindi  $d \leq D$ .

*Dimostrazione.* Useremo da ora in avanti la notazione  $K_{i_1 \dots i_p} := T_{i_1, \dots, i_p}(K) := T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_p}(K)$ . Essendo  $K$  l'invariante di  $\mathcal{T}$ ,

$$\begin{aligned} K &= \bigcup_{i=1}^N T_i(K) = \bigcup_i T_i \left( \bigcup_j T_j(K) \right) = \bigcup_{i,j} T_i(T_j(K)) \\ &= \bigcup_{i,j} T_{i,j}(K) = \bigcup_{i,j} K_{ij} = \dots = \bigcup_{i_1, \dots, i_p} K_{i_1 \dots i_p} \end{aligned}$$

quindi  $\{K_{i_1 \dots i_p}\}$  è un ricoprimento di  $K$ . Inoltre, posto  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq N}(\lambda_i) < 1$ , si ha  $\text{diam}(K_{i_1 \dots i_p}) \leq \lambda^p \text{diam}(K) \rightarrow 0$  per  $p \rightarrow \infty$ . Dunque, scelto  $\delta > 0$  esiste  $p$  tale che  $\text{diam}(K_{i_1 \dots i_p}) \leq \delta$  e quindi  $\{K_{i_1 \dots i_p}\}$  è un  $\delta$ -ricoprimento di  $K$ . Inoltre, poiché  $D$  è la dimensione similare,

$$\sum_{i_1, \dots, i_p} (\text{diam } K_{i_1 \dots i_p})^D = \sum_{i_1, \dots, i_p} \lambda_{i_1}^D \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}^D (\text{diam } K)^D = (\text{diam } K)^D.$$

Da cui segue

$$\mathcal{H}_\delta^D(K) \leq \frac{\omega_D}{2^D} \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^N (\text{diam } K_{i_1 \dots i_p})^D = \frac{\omega_D}{2^D} (\text{diam } K)^D$$

cioè, per  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{H}^D(K) < +\infty$ . Infine, se per assurdo  $D < d$ , per una nota proprietà della dimensione di Hausdorff, si avrebbe  $\mathcal{H}^D(K) = \infty$ , quindi deve essere  $d \leq D$ .  $\square$

**Proposizione 14.** Sia  $K$  l'insieme invariante di  $\mathcal{T}$ ,  $\dim_{\mathcal{H}}(K) = d$  e supponiamo che  $0 < \mathcal{H}^d(K) < \infty$ , allora

$$d = D \iff \mathcal{H}^d(T_i(K) \cap T_j(K)) = 0 \quad \forall i \neq j$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo l'implicazione  $\boxed{\Leftarrow}$ . Si ha

$$\mathcal{H}^d(K) = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^d(T_i(K)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^d \mathcal{H}^d(K)$$

ed essendo  $0 < \mathcal{H}^d(K) < \infty$  segue  $\sum_{i=1}^N \lambda_i^d = 1$ , ossia  $d = D$ . Per quanto riguarda l'implicazione  $\boxed{\Rightarrow}$ , si ha

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{H}^D(T_i(K)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^D \mathcal{H}^D(K) = \mathcal{H}^D(K)$$

da cui segue che  $\mathcal{H}^D(T_i(K) \cap T_j(K)) = 0 \quad \forall i \neq j$ . □

Tuttavia nel caso in cui l'insieme finito di similitudini  $\mathcal{T}$  soddisfi la condizione dell'insieme aperto, l'invariante di  $\mathcal{T}$  ha dimensione di Hausdorff uguale a  $D$  (facile quindi da calcolare).

**Definizione 15.**  $\mathcal{T}$  soddisfa la *condizione dell'insieme aperto* se esiste un insieme aperto  $V$  non vuoto tale che:

- (i)  $\bigcup_{i=1}^N T_i(V) \subseteq V$
- (ii)  $T_i(V) \cap T_j(V) = \emptyset$ , se  $i \neq j$

Riportiamo infine il seguente teorema. Tralasciamo la dimostrazione che richiede strumenti avanzati.

**Teorema 16.** *Se  $\mathcal{T}$  soddisfa la condizione dell'insieme aperto, allora si ha che  $0 < \mathcal{H}^D(K) < \infty$  e quindi  $d = D$ .*

**Esempio 17.** Supponiamo che esista un insieme chiuso  $C$  con l'interno non vuoto tale che  $T_i(C) \subseteq C \quad \forall i = 1, \dots, N$  e  $(T_i(C))^\circ \cap (T_j(C))^\circ = \emptyset$ , se  $i \neq j$ . Allora è semplice mostrare che la condizione dell'insieme aperto vale con  $V = C^\circ$ . Questa situazione si applica, ad esempio, prendendo come  $C$  l'involuppo convesso dell'invariante, alla curva di Koch.

Dal teorema segue quindi che tale frattale ha dimensione di Hausdorff  $d = D = \log_3 4$  come calcolato nell'Esempio 11.

## Appendice 1

Riportiamo un estratto del codice utilizzato, ad esempio, per la realizzazione della Figura 1. Viene usato il linguaggio di programmazione C, con l'ausilio delle librerie OpenGL e Glut.

```
void drawFractal(int n) {
    if (n==0) drawSet(); // disegna l'insieme iniziale
    else {
        glPushMatrix();    // memorizza il sistema di riferimento

        // scrivo la 4 trasformazioni che danno la curva di Koch
        glScalef(1.0/3,1.0/3,1.0/3);          drawIter(n-1);
        glTranslatef(1,0,0); glRotatef(60,0,0,1); drawIter(n-1);
        glTranslatef(1,0,0); glRotatef(-120,0,0,1); drawIter(n-1);
        glTranslatef(1,0,0); glRotatef(60,0,0,1); drawIter(n-1);

        glPopMatrix();    //torna al sistema di riferimento memorizzato
    }

    void display(void) {
        glLoadIdentity();    // sistema di riferimento iniziale
        drawFractal(recurseLevel); // recurselevel indica il numero
                                   // di passi da eseguire
        glutSwapBuffers();
    }
}
```

## Appendice 2

**Definizione 18.** Siano  $A \subseteq X$  e  $\varepsilon > 0$ , definiamo l' $\varepsilon$ -intorno di  $A$  come:

$$(A)_\varepsilon = \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

*Dimostrazione del Teorema 5.* Sia  $\{A_n\}$  una successione di Cauchy in  $(\mathcal{B}(X), h)$ , allora, pur di prendere una sottosuccessione (se una sottosuccessione di una successione di Cauchy converge, allora l'intera successione converge), possiamo supporre che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad h(A_n, A_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+2}}$$

Sia  $A = \{x \in X : \exists \text{ una successione } \{x_n\}, x_n \in A_n, x_n \rightarrow x\}$ . Allora:

$A \neq \emptyset$ . Preso infatti  $x_1 \in A_1$ , esiste  $x_2 \in A_2$  tale che  $d(x_1, x_2) \leq 2h(A_1, A_2) \leq \frac{1}{4}$ , e così via... Esiste quindi una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  con  $x_n \in A_n$  e  $d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ . Ogni successione così fatta è di Cauchy. Quindi, poiché  $(X, d)$  è completo, esiste  $x \in X$  t.c.  $x_n \rightarrow x$ . Dunque  $x \in A$ .

$A$  chiuso. Sia  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una successione di punti di  $A$  tale che  $a_i \rightarrow a$ . Voglio dimostrare che  $a \in A$ . Poiché  $\forall i a_i \in A$ , segue  $\forall i \in \mathbb{N}$ , esiste una successione  $\{x_{i,n}\}_n$  con  $x_{i,n} \in A_n$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = a_i$ . Quindi esiste una successione crescente di naturali  $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  t.c.  $d(x_{i,m_i}, a_i) \leq d(a_i, a)$  per ogni  $i$ . Ciò implica, per la disuguaglianza triangolare, che  $d(x_{i,m_i}, a) \leq 2d(a_i, a)$ .

Da cui segue che  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i,m_i} = a$  e quindi, per il lemma di estensione (Lemma 19), poiché  $x_{i,m_i} \in A_{m_i}$ ,  $a \in A$ .

A limitato, in quanto  $A \subseteq (A_n)_{\frac{1}{2^{n-1}}} \forall n \in \mathbb{N}$ . Fissato infatti  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in A$ , esiste una successione  $\{x_k\}_k$  t.c.  $x_k \in A_k$  e  $x_k \rightarrow x$ , allora esiste  $N > n$  t.c.  $d(x_N, x) \leq \frac{1}{2^n}$ . Partendo da  $y_N := x_N$  costruisco quindi una successione  $y_N, y_{N-1}, \dots, y_{n+1}, y_n$  in modo che  $y_k \in A_k$  e  $d(y_k, y_{k+1}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \forall k$ . Di conseguenza  $d(y_N, y_n) \leq \frac{1}{2^n}$  e per la disuguaglianza triangolare  $d(y_n, x) \leq d(y_n, x_N) + d(x_N, x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ . Quindi  $d(x, A_n) \leq d(x, y_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Quindi  $A \in \mathcal{B}(X)$ . Resta infine da mostrare:

$A_n \rightarrow A$  con la distanza di Hausdorff, anzi  $h(A_n, A) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  per ogni  $n$ . Osserviamo che, fissato  $n$ :

$$h(A_n, A) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \iff \begin{cases} A \subseteq (A_n)_{\frac{1}{2^{n-1}}} \\ A_n \subseteq (A)_{\frac{1}{2^{n-1}}} \end{cases}$$

La prima inclusione si è già vista, resta da mostrare la seconda. Fissato  $y \in A_n$ , esiste  $x_{n+1} \in A_{n+1}$  tale che  $d(y, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ , analogamente esiste  $x_{n+2} \in A_{n+2}$  tale che  $d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \frac{1}{2^{n+2}} \dots$  Costruiamo dunque una successione  $\{x_j\}_{j=n}^{\infty}$  ( $x_n := y$ ) tale che  $d(x_j, x_{j+1}) \leq \frac{1}{2^{j+1}} \forall j$ . Per come è fatta  $\{x_j\}_{j=n}^{\infty}$  è di Cauchy e quindi converge ad un  $x \in A$ . Per la disuguaglianza triangolare  $d(x_j, x) \leq \frac{1}{2^j}$  per ogni  $j \geq n$ ; quindi abbiamo trovato un  $x \in A$  t.c.  $d(y, x) \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ , cioè  $d(y, A) = \inf_{a \in A} d(y, a) \leq d(y, x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

□

**Lemma 19** (Lemma di estensione). *Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico,  $\{A_n\}$  una successione di Cauchy in  $(\mathcal{B}(X), h)$ ,  $\{n_j\}_j$  una successione crescente di naturali. Supponiamo di avere una successione di Cauchy  $\{x_{n_j}\}_j$  con  $x_{n_j} \in A_{n_j} \forall j \in \mathbb{N}$ .*

*Allora c'è una successione di Cauchy  $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$  tale che  $\tilde{x}_n \in A_n \forall n \in \mathbb{N}$  e  $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j} \forall j = 1, 2, \dots$*

*Dimostrazione.* Costruiamo la successione  $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$  come segue. Per  $n \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  scelgo  $\tilde{x}_n \in A_n$  t.c.  $d(x_{n_1}, \tilde{x}_n) \leq 2d(x_{n_1}, A_n)$ . Analogamente, fissato  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$  scelgo  $\tilde{x}_n \in A_n$  t.c.  $d(x_{n_j}, \tilde{x}_n) \leq 2d(x_{n_j}, A_n)$ .

Ora  $\tilde{x}_n \in A_n \forall n \in \mathbb{N}$  e  $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j} \forall j = 1, 2, \dots$  è ovvio per costruzione. Mostriamo che  $\{\tilde{x}_n\}_n$  è di Cauchy. Fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono  $N_1$  e  $N_2$  tali che

$$\begin{aligned} \forall n_k, n_j \geq N_1 &\Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ \forall n, m \geq N_2 &\Rightarrow h(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{6}. \end{aligned}$$

Sia  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Dati  $n, m \geq N$ , scegliamo  $j$  e  $k$  in modo che  $m \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$  e  $n \in \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$ . Allora, poiché  $n_j \geq m \geq N$ , si ha  $h(A_{n_j}, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{6}$  e

$$d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leq 2d(x_{n_j}, A_m) \leq 2h(A_{n_j}, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Analogamente  $d(\tilde{x}_n, x_{n_k}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Allora

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \varepsilon.$$

□

## Riferimenti bibliografici

- [1] M. Barnsley: *Fractals Everywhere* (Academic Press, 1988)
- [2] J. E. Hutchinson: *Fractals and self similarity* (Indiana Univ. Math. Journ., Vol 30, num. 5, 1981)
- [3] B.B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman and company, 1983)