

ANALISI MATEMATICA 2

LEZIONE 35 - 26.2.2026

INTEGRALI IN $\mathbb{R}^n$

Teorema (algebra dei misurabili) Se $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ sono (limitati) e P-J misurabili allora $\bar{E}, \bar{E}, \partial E, E \setminus F, E \cap F, E \cup F$ sono P-J misurabili.
 (NON LO FACCIAMO MA: E è P-J misurabile

Inoltre $|\partial E| = 0$ e $\overset{\substack{\text{misura di} \\ \text{Lebesgue}}}{\mathbb{L}(\partial E)} = 0$)

$$|E \cup F| + |E \cap F| = |E| + |F|$$

dim E misurabile $\Leftrightarrow \mathbb{1}_E$ integrabile



$$\mathbb{1}_{E \setminus F} = (\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_F)^+$$

$$\mathbb{1}_{E \cap F} = \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E \setminus F}$$

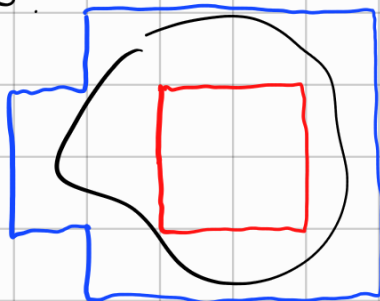
$$\mathbb{1}_{E \cup F} = \mathbb{1}_F + \mathbb{1}_{E \setminus F}$$

$E \setminus F, E \cap F, E \cup F$
sono misurabili

Inoltre $\mathbb{1}_{E \cup F} + \mathbb{1}_{E \cap F} = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_F$

da cui $|E \cap F| + |E \setminus F| = |E| + |F|$

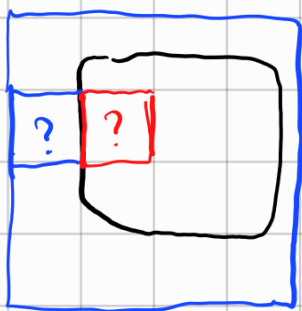
Mauro $|\partial E| = 0$.



E misurabile

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_E \\ &\updownarrow \\ m_N^N(E) - m_N(E) &\rightarrow 0 \\ \parallel &\parallel \\ S_N^N(\mathbb{1}_E) &S_N(\mathbb{1}_E) \end{aligned}$$

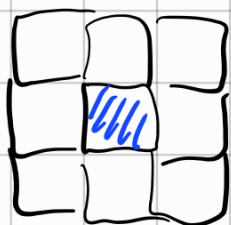
$m^N(\partial E)$ assomiglia molto a $m^N(E) - m_N(E)$



ma c'è un problema con i punti di ∂E che stanno nell'intersezione di più cubetti adiacenti.

$$m^N(\partial E) \leq (3^N - 1) (m^N(E) - m_N(E)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

↓
0



numero di cubetti adiacenti ad un cubetto fissato.

$|\partial E| = 0$ se E è misurabile.

In particolare ∂E è misurabile

e quindi $\bar{E} = E \cup \partial E$ è misurabile

$\overset{\circ}{E} = E \setminus \partial E$ è misurabile.

□

Esempi di funzioni non integrabili

• $\mathbb{1}_{Q \cap [0,1]}$ non è integrabile.

(già visto)

• $Q \cap [0,1]$ non è misurabile

[Per Lebesgue $Q \cap [0,1]$ è misurabile (ha misura 0) e $\mathbb{1}_{Q \cap [0,1]}$ è integrabile (con $S=0$).]

[Per Lebesgue la misurabilit  si mantiene anche con unioni e intersezioni numerabili]

Teorema (significato geometrico dell'integrale)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile limitata, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ^{limitata} integrabile

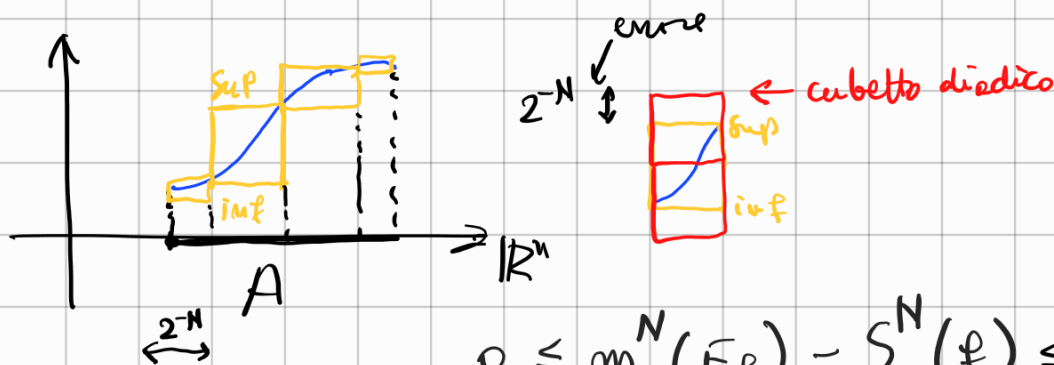
Po to

$$E_f := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Allora E_{f^+} e E_{f^-} sono misurabili

$$\int_A f = |E_{f^+}| - |E_{f^-}|$$

dim Supponiamo $f \geq 0$, vogliamo mostrare che $\int_A f = |E_f|$.



$$0 \leq \underbrace{m^N(E_f)}_{\text{red}} - \underbrace{S^N(f)}_{\text{yellow}} \leq 2 \cdot 2^{-N} m^N(A)$$

$$0 \leq S_N(f) - m_N(E_f) \leq 2 \cdot 2^{-N} m^N(A)$$

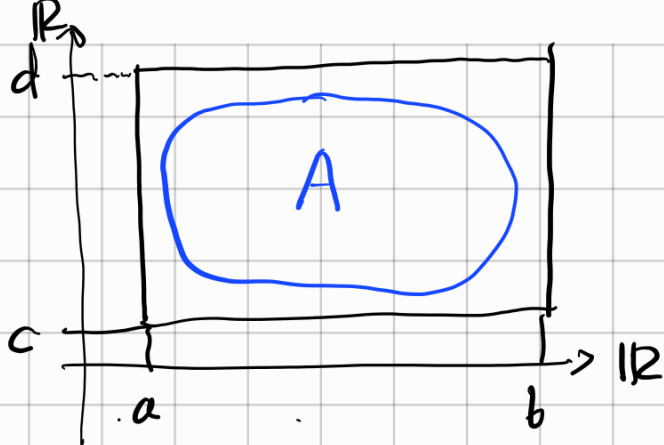
$$\begin{aligned} m^*(E) &= S^*(f) \\ m_*(E) &= S_*(f) \end{aligned} \Rightarrow E \text{   misurabile}$$

$$\downarrow$$

$$2 \cdot 0 \cdot |A| = 0$$

$$|E_f| = \lim_{N \rightarrow \infty} m^N(E_f) = \lim_{N \rightarrow \infty} S^N(f) = \int f.$$

$$|E_{f^+}| = \int f^+, \quad |E_{f^-}| = \int f^- \Rightarrow \int f = \int f^+ - \int f^- = |E_{f^+}| - |E_{f^-}|$$



$$\int_A f = \int_{[a,b] \times [c,d]} \tilde{f} = \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x,y) dy dx$$

FORMULA DI RIDUZIONE

Teorema (formula di riduzione / Fubini-Tonelli)

Sia $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -integrabile tale che

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ sia anch'essa $\mathbb{R}$ -integrabile.

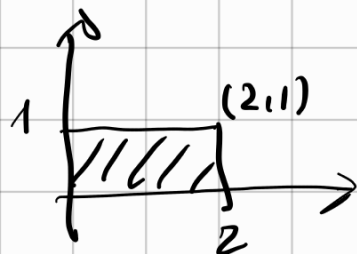
$\left. \begin{array}{l} \text{Per} \\ \text{LEBESGUE} \\ \text{NON} \\ \text{SERVE} \end{array} \right\}$

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dy \right) dx$$

Esempio $f(x,y) = x + y^2 + xy$ $R = [0,2] \times [0,1]$

⚠ f è integrabile perché continua (vedi sotto)



$$\int_R f = \iint_R (x + y^2 + xy) dx dy$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^1 (x + y^2 + xy) dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[xy + \frac{y^3}{3} + x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 dx$$

$$= \int_0^2 \left[x + \frac{1}{3} + \frac{x}{2} - 0 - 0 - 0 \right] dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_0^2 = \frac{4}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{4}$$

$$= \frac{11}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{OS)} \quad f(x,y) = \varphi(x) \cdot y \\ \int_0^1 \int_{-1}^1 f(x,y) dy dx = \int_0^1 0 dx \\ \textcircled{MA} \quad \text{se } \varphi(x) = \mathbb{1}_Q \quad \varphi \text{ non } \acute{\text{e}} \text{ integrabile} \\ \text{e neanche } f. \end{array} \right]$$

dim (formula di riduzione) integrabile per ipotesi

Poniamo $g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dy$

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Tesi: $\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f = \int_{\mathbb{R}^n} g$

$$S^N(g) := 2^{-nN} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sup_{x \in Q_k^N} \int f(x,y) dy$$

$$\leq 2^{-nN} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sup_{x \in Q_k^N} S^N(f(x, \cdot))$$

$\uparrow$
in $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
&= 2^{-mN} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sup_{x \in Q_k^N} 2^{-mN} \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} \sup_{y \in Q_j^N} f(xy) \\
&\leq 2^{-(n+m)N} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} \sup_{\substack{Q_k^N \\ \cap \mathbb{R}^n}} f(\sup_{\substack{Q_j^N \\ \cap \mathbb{R}^m}}) \\
&= 2^{-(n+m)N} \sum_{(k,j) \in \mathbb{Z}^{n+m}} \sup f(Q_{(k,j)}^N) \\
&= S^N(f).
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$S_N(g) \geq S_N(f)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S_N(f) &\leq S_N(g) \leq S^N(g) \leq S^N(f) \\
&\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
&= S_*(f) \leq S_*(g) \leq S^*(g) \leq S^*(f) = \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\int f}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_*(g) = S^*(g)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f = \int_{\mathbb{R}^n} g = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f dy dx$$

□

Teorema (integrabilità delle fn continue)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto P - J -misurabile,
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f è R -integrabile.

dim f è limitata. f continua su un compatto
 è uniformemente continua.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \quad \max_{Q_k^N} f - \min_{Q_k^N} f < \varepsilon.$$

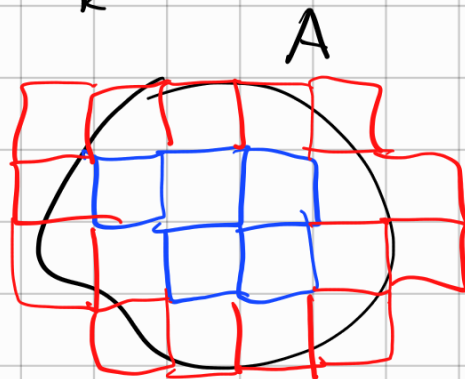
$$2^{-N} \sqrt{n} < \delta$$

$$Q_k^N \subseteq A$$

$$|f| \leq M$$

$$\Leftarrow |\partial A| = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : m^n(\partial A) < \varepsilon$$



$$S^N(f) - S_N(f) = 2^{-nN} \sum_k \left(\sup_{Q_k^N} f - \inf_{Q_k^N} f \right)$$

$$= 2^{-nN} \left[\sum_{k, Q_k^N \subseteq A} \varepsilon + \sum_{k, Q_k^N \cap \partial A \neq \emptyset} 2M \right]$$

$$\leq m^N(A) \cdot \varepsilon + m^N(\partial A) \cdot 2M$$

$$\leq m^N(A) \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot 2M \quad \leftarrow \varepsilon \text{ è arbitrariamente piccolo.}$$

$$S^N(f) - S_N(f) \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty \quad \square$$