ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 65 - 13.3.2024

Metodo della variazione delle costanti

ES $\quad u''(x) + u(x) = \dfrac{1}{\cos x} \quad (*)$

Risolvo l'omogenea associata: $u'' + u = 0$

polinomio associato: $\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

Ho 2 soluzioni indipendenti dell'eq. omogenea:

$u_1(x) = \sin x \qquad u_2(x) = \cos x$

Tutte le sol. della omogenea: $u_0(x) = A \sin x + B \cos x$

Tutte le sol. della non omogenea:

$$u(x) = A \sin(x) + B \cos x + u_*(x)$$

dove u_* è una soluzione particolare della non-omogenea.

Metodo della variazione delle costanti:

Cerco una soluzione u_* della forma:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & u_*(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x \\
0 & u_*'(x) = A(x)\cos x - B(x)\sin x + \boxed{A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 0} \\
1 & u_*''(x) = -A(x)\sin x - B(x)\cos x + \boxed{\left(-B'(x)\sin x + A'(x)\cos x\right)}
\end{array}
$$

$$\underbrace{\left(-B'(x)\sin x + A'(x)\cos x\right)}_{=\frac{1}{\cos x}}$$

$1 \cdot u_*'' + 0 \cdot u_*' + 1\, u_* = A(x)\cdot\left(\cancel{-\sin x + \sin x}\right) + B(x)\left(\cancel{-\cos x + \cos x}\right) + 1 \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

$$\boxed{\begin{cases} A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 0 \\ -B'(x)\sin x + A'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}}$$

è invertibile MAGIA?

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{matrix}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos x} \end{pmatrix}$$

$$W(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} = \text{matrice Wronskiana}$$

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\sin x}{\cos x} \\ A'(x)\dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x + A'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{\ } \\ A'(x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B'(x) = -\operatorname{tg} x \\ A'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{\sin}{\cos} = -\int \frac{1}{\cos}\, d\cos$$

$$-\ln \cos x$$

$$\begin{cases} A(x) = x \\ B(x) = \ln|\cos x| \end{cases}$$

$$u_\neq(x) = A(x)\cdot\sin x + B(x)\cdot\cos x$$

$$= x\cdot\sin x + \ln|\cos x|\cdot\cos x$$

Tutte le soluzioni della eq. non omogenea sono:

$$u(x) = A\cdot\sin x + B\cos x + x\cdot\sin x + \ln|\cos x|\cos x$$

$$= (A+x)\sin x + (B+\ln|\cos x|)\cos x$$

In generale: $a_n(x)\,u^{(n)} + a_{n-1}(x)\,u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = f(x)$

Siano $u_1 \dots u_n$ soluzioni indipendenti della omogenea associata: $a_n u_k^{(n)} + \dots + a_0 u_k = 0 \quad k = 1 \dots n$

$$\begin{array}{l} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \\ a_n \end{array}\left|\begin{array}{l} u_\neq(x) = A_1(x)\,u_1(x) + \dots + A_n(x)u_n(x) \\ u_\neq'(x) = A_1 u_1' + \dots + A_n u_n' + \\ u_\neq''(x) = A_1 u_1'' + \dots + A_n u_n'' + \\ \vdots \\ u_\neq^{(n)}(x) = A_1 u_1^{(n)} + \dots + A_n u_n^{(n)} + \end{array}\right. \begin{cases} A_1' u_1 + \dots + A_n' u_n = 0 \\ A_1' u_1' + \dots + A_n' u_n' = 0 \\ \vdots \\ A_1' u_1^{(n-1)} + \dots + A_n' u_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

SUPPONIAMO SI POSSA RISOLVERE

Verifichiamo che $u_\neq$ è soluzione dell'eq. non omogenea.

u_1 è sol. dell'omogenea

$$a_n u_\neq^{(n)} + \dots + a_0 u_\neq = A_1\left(\cancel{a_n u_1^{(n)} + \dots + a_1 u_1' + a_0 u_1}\right) + \dots +$$

$$+ A_n\left(\cancel{a_n u_n^{(n)} + \dots + a_1 u_n' + a_0 u_n}\right) +$$

$$+ a_n \left(A_1' u_1^{(n-1)} + \dots + A_n' u_n^{(n-1)} \right)$$

$$= \cancel{a_n} \cdot \frac{f(x)}{\cancel{a_n}} = f(x). \qquad \square$$

<u>Perché</u> $W(x)$ è invertibile?

<u>Def</u> Siano $u_1, \dots, u_n$ funzioni. Definiamo:

$$W(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

si chiama matrice Wronskiana. $W: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$

<u>Teorema</u> Siano $u_1 \dots u_n$ soluzioni dell'equazione lineare omogenea:

$$u^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) u^{(k)}(x)$$

$$u_k : I \to \mathbb{R}$$

Allora sono equivalenti:

(i) $u_1 \dots u_n$ sono indipendenti

(ii) $\forall x \in I \quad \det W(x) \neq 0$

(iii) $\exists x \in I \quad \det W(x) \neq 0$.

dim $(iii) \Rightarrow (i)$

dimostriamo: $\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$

$\neg(i)$ $\exists \lambda_1 \dots \lambda_n$ non tutti nulli
$$\begin{cases} \sum \lambda_k u_k(x) = 0 & \forall x \in I \\ \sum \lambda_k u_k'(x) = 0 & \forall \\ \vdots \\ \sum \lambda_k u_k^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ W(x) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \forall x : \det W(x) = 0 \right.$$

assurdo $\overset{(iii)}{\exists} x : \det W(x) \neq 0$

$(i) \Rightarrow (ii)$ $u_1 \dots u_n$ sono soluzioni indipendenti di una eq. lineare omogenea in forma normale

Fissiamo $x_0 \in I$

$$J(v) = \begin{pmatrix} v(x_0) \\ v'(x_0) \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \qquad W(x_0) = \Big(J(u_1), J(u_2), \dots, J(u_n) \Big)$$

$J : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $V = \text{span} \langle u_1, \dots, u_n \rangle$

è un isomorfismo.

Se $u_1 \dots u_n$ è una base di V

allora $J(u_1) \dots J(u_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

dunque $W(x)$ è invertibile (è la matrice delle coordinate dei vettori di una base di $\mathbb{R}^n$).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\qquad \forall x : P(x) \Rightarrow \exists x : P(x)$

ovvio

Esempio Per verificare che $\sin x$ e $\cos x$ sono indipendenti posso guardare il det Wronskiano:

$$W(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$$

$$\det W(x) = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0 \quad \forall x.$$

Vale (ii)

Osservazione se $u_1 \dots u_n$ funzioni qualunque (derivabili $(n-1)$ volte)

$\forall x \ \det W(x) \neq 0 \Rightarrow \exists x \ \det W(x) \neq 0 \Rightarrow u_1 \dots u_n$ indipendenti

---

$$\sum \lambda_k u_k = 0 \Rightarrow \sum \lambda_k u_k' = 0 \Rightarrow \sum \lambda_k u_k'' = 0$$

$$W(x) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$