ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 51 - 9.2.2024

Teorema: Se f è limitata e R-integrabile su $[a,b]$, se φ è continua allora $\varphi \circ f$ è R-integrabile su $[a,b]$.

Cioè $\displaystyle\int_a^b \varphi(f(x))\,dx$ ha senso.

dim: sugli appunti.

dim: caso particolare: $\varphi(y) = |y|$

$\varphi \circ f$ è R-integrabile se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_\varepsilon$:

$$S^*(g, P_\varepsilon) - S_*(g, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \boxed{\underbrace{\Big(\sup_{[x_{k-1},x_k]} g - \inf_{[x_{k-1},x_k]} g\Big)}_{=\ \operatorname{osc}_{[x_{k-1},x_k]} g}} \cdot |x_k - x_{k-1}|$$

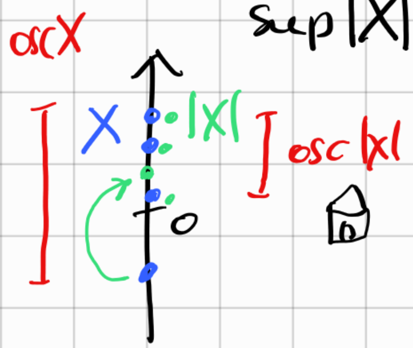
con $g(x) = \varphi(f(x))$

Se $\varphi(y) = |y|$: $\quad \operatorname{osc}_A \varphi(f(x)) = \operatorname{osc}_A |f(x)| \leq \operatorname{osc} f(x)$

$\uparrow$ ci convinciamo che è vero

$$\sup|X| - \inf|X| \leq \sup X - \inf X$$

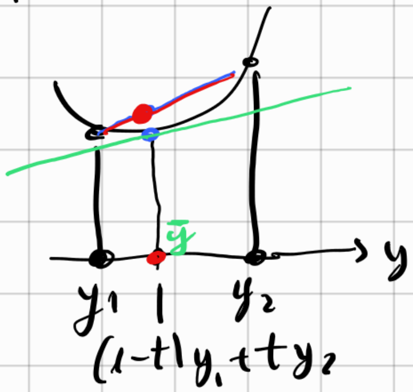
$\square$



Teorema (disuguaglianza di Jensen)

Se φ è convessa, f R-integrabile e continua

$$\varphi\left(\fint_a^b f(x)\,dx\right) \le \fint_a^b \varphi(f(x))\,dx$$



$$\begin{cases} t_1y_1+\dots+t_ny_n \\ t_1+\dots+t_n = 1 \\ t_k \ge 0 \end{cases}$$

dim

$$\bar y = \fint_a^b f(x)\,dx = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

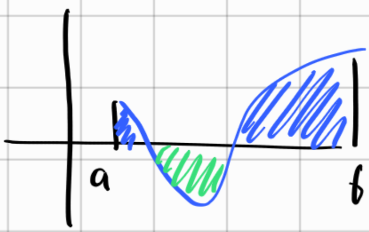
$\inf f \le \bar y \le \sup f$ sia $my+q$ una retta di supporto :

$$\varphi(y) \overset{*}{\ge} my+q \qquad \forall y$$
$$\varphi(\bar y) = m\bar y + q \qquad (y=\bar y)$$

$$mf(x)+q \overset{*}{\le} \varphi(f(x))$$
$$\fint_a^b (mf(x)+q) \le \fint_a^b \varphi(f(x))\,dx$$
$$\parallel$$
$$m\fint_a^b f(x)\,dx + q$$
$$\parallel$$
$$my+q = \varphi(y) = \varphi\left(\fint_a^b f(x)\,dx\right) \qquad \square$$

Corollario:

$$\left|\fint_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\fint_a^b |f(x)|\,dx\right|$$



$$\left|\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\right| = \frac{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|}{|b-a|}$$

Integrali impropri: assoluta convergenza

Teorema (criterio di convergenza assoluta) Sia f loc. R-integrabile

se $\int_a^b |f|$ converge allora $\int_a^b f$ converge.

integrale improprio

dim f loc R-int $\Rightarrow$ $|f|$ loc. R-int e $|f| \geq 0$

teorema visto poco fa

$\Downarrow$ teorema visto ieri

$\int_a^b |f|$ esiste

corollario di poco fa $\Rightarrow$ $\left|\int_\alpha^\beta f\right| \leq \int_\alpha^\beta |f|$

$\Downarrow$ passando al limite

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \qquad \square$$

per confronto vale la tesi.

⚠ Se $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ (funzione di Dirichlet)

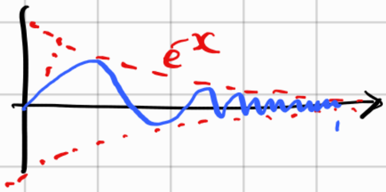
$g = f - \frac{1}{2}$ $\qquad |g| = \frac{1}{2}$ $\qquad |g|$ è R-integrabile ma g no!

Def Diremo che $\int_a^b f$ è

assolutamente convergente se $\begin{cases} \int_a^b |f| \text{ è convergente.} \\ \text{e } f \text{ loc. R integrabile.} \end{cases}$

Esempio: Dire se converge l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\cdot e^{-x}\,dx$$



$f(x) = \sin(x^2)e^{-x}$

$$|f(x)| = |\sin(x^2)|\cdot e^{-x} \le e^{-x} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

$$\Downarrow$$

$$f \text{ convergente} \Leftarrow f \text{ ass. convergente} \Leftarrow \int_0^{+\infty} |f| \le 1$$

ES $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ è assolutamente convergente

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

Esempio in cui $\int|f| = +\infty$ ma $\int f$ è convergente

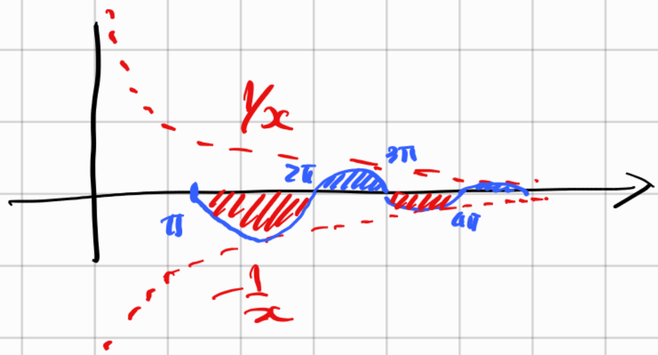
convergente $\not\Rightarrow$ assolutamente convergente.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

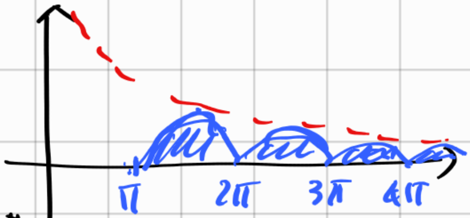
$$\boxed{\text{corrisponde a } a_k = \frac{(-1)^k}{k}}$$

(a) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ è convergente

(b) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ è divergente.



dim (b)



$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\int_0^\pi \sin x\,dx}{(k+1)\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty.$$

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}} \int_\pi^{n\pi} |f| = +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\substack{\beta\to+\infty\\ \beta\in\mathbb{R}}} \int_\pi^{\beta} |f| = +\infty$$

in quanto questo limite esiste essendo $|f| \geq 0$.

[$a_n = f(n)$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \;\underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

ma se $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste allora i limiti sono uguali.]

(a) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge? [guardate gli appunti del gruppo A per un metodo alternativo]

[💡 integro per parti: $\dfrac{\sin x}{x} \rightsquigarrow -\dfrac{\cos x}{x^2}$

$\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty$]

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{\text{per parti}}{=} \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_\pi^{+\infty} - \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= 0 - \frac{1}{\pi} - L$$

$L = \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ è finito in quanto assolutamente convergente.

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \underset{\text{confronto}}{\le} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx < +\infty$$

a memoria $(2>1)$

$\square$

Esercizio ⚠ (da sapere)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{converge sse} \quad \alpha > 1 \quad \text{(si calcola)}$$

$$\boxed{\sum \frac{1}{k^\alpha},\ \sum \frac{1}{k\cdot \ln^\alpha k} \text{ convergono sse } \alpha>1.}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^\alpha x}\, dx \quad \text{converge sse } \alpha > 1 \quad \text{(si calcola)}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta \ln^\alpha x}\, dx \qquad \beta \neq 1 \quad \left(\text{confronto asintotico con } \frac{1}{x^\beta} \text{ o } \frac{1}{x^{\beta+\varepsilon}}.\right)$$

converge sse $\beta > 1$ o $\underbrace{\beta = 1 \text{ e } \alpha > 1}_{\text{caso precedente}}$.

Ma ci sono anche:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx \quad \text{converge sse} \quad \alpha < 1.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x \cdot \ln^\alpha x}\, dx \quad \text{converge sse} \quad \alpha > 1.$$

(verificare!)

⚠ Abbiamo fatto esempi di punti cattivi: 0 e $+\infty$.
$-\infty$ è analogo a $+\infty$
e $x_0 \in \mathbb{R}$ è analogo a $x_0 = 0$.

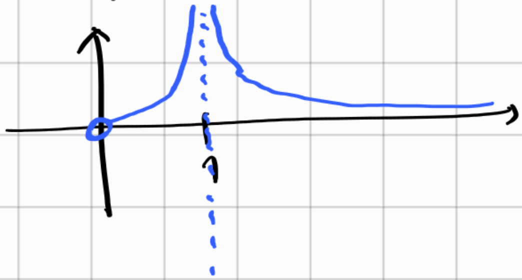
Esempio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2 + |\ln x|^\alpha}\, dx$$

per quali $\alpha > 0$ converge?

Punti cattivi: $+\infty$, 0?, 1

è un punto cattivo



(Sviluppo il $\ln x$ per $x \to 1$) ....

$$\int_0^1 \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx = \left[\ln|\ln x|\right]_0^1 = -\infty - (+\infty) = -\infty$$
