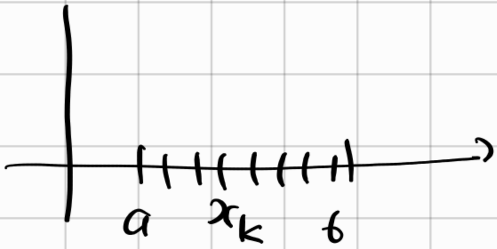
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 46 - 29.1.2024

Es 2. test settimanale.

$$\int_a^b (mx+q)\,dx$$

$$f(x) = mx+q$$



$$P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad x_k = a + \frac{b-a}{n}\cdot k$$

$$S^*(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$(m \geq 0)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(m\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)+q\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[(ma+q)\frac{b-a}{n} + m\,\frac{b-a}{n}\,\frac{b-a}{n}\cdot k\right]$$

$$= (ma+q)(b-a) + m\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= (ma+q)(b-a) + m\frac{(b-a)^2}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} (ma+q)(b-a) + \frac{m(b-a)^2}{2}$$

$$= (b-a)\left(ma+q+(b-a)\frac{m}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)\,(2ma+2q+mb-ma)$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)\,(ma+mb+2q) \qquad \square$$

Teorema fondamentale del calcolo

Se f è continua, $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo $\subseteq \mathbb{R}$

(1) Allora fissato $x_0 \in I$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f$$

F è una primitiva di f.

(2) Se F è una primitiva di f: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Def F è una primitiva di f se $F' = f$.

Notazione

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx$$

Es $\int_a^b (mx+q)\, dx = F(a,b,m,q)$

integro rispetto a x

m e q sono fissati.

variabile muta.

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

Non uso x che è impegnata.

Es $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = F(\pi) - F(0) = -\cos\pi + \cos(0) = 2$

$$F(x) = -\cos x \qquad F'(x) = \sin x$$

Notazione:

$$F(b) - F(a) = [F]_a^b = F\Big|_a^b = [F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{b}$$

Se $F' = f$, f continua: $\int_a^b f = [F]_a^b$

Definizione [integrale indefinito] $\quad F \xrightarrow{D} f$

~~$\int$ non c'entra con gli integrali.~~

$$\int f = \int f(x)\,dx =: \{F : F' = f\} = D^{-1}(\{f\})$$

$$\mathcal{D}(A) = \{F : A \to \mathbb{R} : F \text{ è derivabile}\}$$

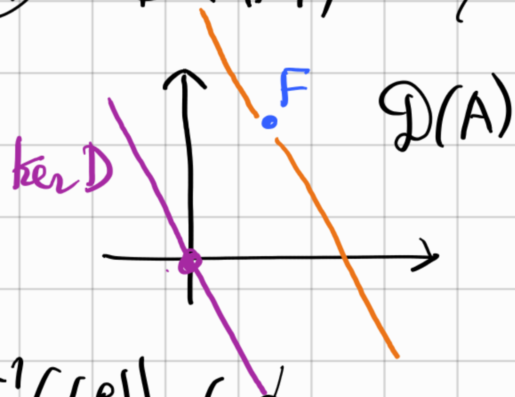
$$\mathcal{D}(A) \xrightarrow{D} \mathbb{R}^A \leftarrow \text{funzioni } A \to \mathbb{R}$$

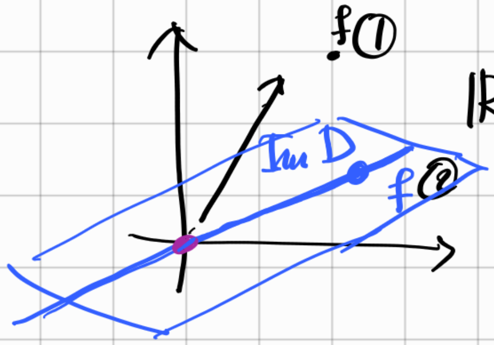
D è un operatore lineare.

Sia $f \in \mathbb{R}^A$ ovvero $f : A \to \mathbb{R}$.

Come è fatto $\int f = D^{-1}(\{f\})$?

Casi: ① $D^{-1}(\{f\}) = \emptyset \qquad f \notin \operatorname{Im} D$.





Caso ② $D^{-1}(\{f\}) \neq \emptyset$

$\exists F : F' = f$.

Come quando risolvo: $Ax = b$

$$\int f = D^{-1}(\{f\}) = \boxed{F + \boxed{\ker D}}$$

$\ker D$: sottosp. vettoriale

$F + \ker D$: sottospazio affine

Infatti: se $G \in F + \ker D$
$G' = F' + 0 = f$

Viceversa se $G' = f \qquad (G-F)' = f - f = 0$
$G = F + (G-F) \in F + \ker D$.

Teorema Se A è un intervallo $\ker D = \{c : \text{costanti}\} = \mathbb{R}$.

dim (già vista) criterio di monotonia (o teorema di Lagrange)

Se $f'(x)=0$ $\forall x$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(b)=f(a).$$

Altrimenti se A non è un intervallo $\dim \ker D > 1$.

Esempio Determinare: $\int \frac{1}{x}\,dx$ $\qquad f(x)=\frac{1}{x}$ $\qquad f: \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

Soluzione sbagliata $\qquad D \ln|x| = \frac{1}{x}$ $\qquad A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\ln|x| \in \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx \overset{NO}{=} \{\ln|x| + c : c\in\mathbb{R}\}$$

A non è un intervallo.

soluzione giusta

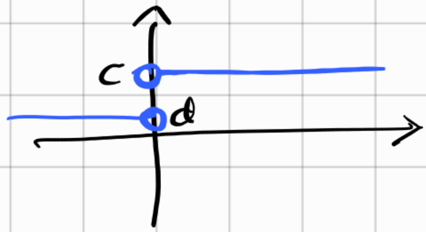
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \int 0\,dx$$

$$= \ln|x| + \ker D$$

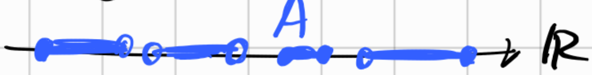
$$D : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{R}^A.$$

$\ker D = \{f_{c,d}\}$, $\dim \ker D = 2$.

$$f_{c,d} = \begin{cases} c & \text{se } x>0 \\ d & \text{se } x<0 \end{cases}$$



In generale $\dim \ker D = \#$ di componenti connesse di A.



In pratica.

Invece di scrivere: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

io scriverei: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$

intendendo $\ni$

Forse il modo più giusto sarebbe: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + \int 0$

Altra possibilità: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

$c = c(x)$
è localmente costante
$(c' = 0)$

<u>Nota 1</u> $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx$ per ora non ha senso.

Se scrivo $\int_a^b f$ suppongo che f sia definita su $[a,b]$ che è un intervallo.

<u>Nota 2</u> $F \in \int f$ non basta per applicare il teo fondamentale del calcolo. Serve:

① A = intervallo

② f continua.

<u>Nota 3</u> Se ① e ② sono soddisfatti, la notazione è sensata:

Formula fondamentale del calcolo.

$$\int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b \qquad \int_a^b = \left[\int \ \right]_a^b$$

Integrale di Riemann
somme superiori/inferiori etc

antiderivata

LA RICERCA DELLA PRIMITIVA

Es $\int \sin x \, dx \overset{(\ni)}{=} -\cos x$

$$f \xrightarrow{D} f'$$

f	f'
$\cos x$	$-\sin x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$

$$\xleftarrow{\int}$$

Primitive immediate:

$$\int x^\alpha \, dx \ni \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx \ni \ln|x|$$

$$\int e^x \, dx \ni e^x$$

$$\int \sin x \, dx \ni -\cos x, \qquad \int \cos x \, dx \ni \sin x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx \ni \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \ni \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{1+x^3} = ?$$

lo vedremo

$$\int e^{x^2} = ?$$

Operatori con gli integrali (in realtà sono primitive)

① **Linearità**

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot \int f + \mu \int g$$

ES se $\int f = \emptyset$ es $f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x>0 \\ 0 & se\ x \leq 0. \end{cases}$

$$\int f - f = \int f - \int f = \emptyset - \emptyset = \emptyset$$

$$\int 0 = \{c : c \in \mathbb{R}\}$$

dim dati $F \in \int f$, $G \in \int g$

$$\lambda \cdot F + \mu \cdot G \overset{?}{\in} \int (\lambda f + \mu g)$$

$$(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g \quad \underline{ok}$$

ES $\int (2x-1)^2 dx = \int (4x^2 - 4x + 1)\, dx$

$$= 4\int x^2 dx - 4\int x\, dx + \int 1\, dx$$

$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x \qquad (+c)$$

CAMBIO di VARIABILE

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

$$\int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)).$$

ovvero

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) \qquad F \in \int f.$$

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \left[\int f(y)\,dy\right]_{y=g(x)}.$$

$$\begin{cases} y = g(x) \\ dy = g'(x)\,dx \end{cases} \leftarrow \frac{dy}{dx} = g'(x)$$

ES

$$\boxed{\int (2x-1)^2\,dx} = \frac{1}{2}\int (2x-1)^2\,2\,dx = \frac{1}{2}\left[\int y^2\,dy\right]_{y=2x-1} =$$

$$\begin{cases} y = 2x-1 \\ dy = 2\cdot dx \end{cases}$$

sottointeso

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=2x-1} = \frac{1}{2}\,\frac{(2x-1)^3}{3} \qquad \square$$

Esercizio 5 test settimanale

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h \cos(x^2)\,dx$$

Teo media integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

$$\frac{1}{h}\int_0^h \cos(x^2)\,dx = \cos(c^2) \qquad c \in [0,h]$$

$$\downarrow$$

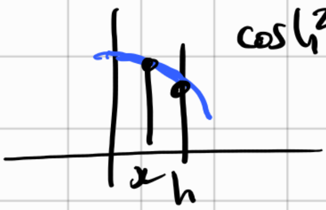
$$\cos(0^2) = 1.$$

$c \to 0$ per $h \to 0$

Alternativa:

$$\cos h^2 \leq \cos(x^2) \leq 1$$

$$\cos h^2 \leq \cos x^2 \leq 1$$



$$\frac{h\cos h^2 = \int_0^h \cos h^2 \le \int_0^h \cos(x^2) \le \int_0^h 1 = h}{h}$$

$$\frac{h\cos h^2}{h} = \cos h^2 \xrightarrow{} 1 \qquad \downarrow 1 \qquad \frac{h}{h} = 1$$

$$\left(\int_0^h \cos h^2 \, dx = \cos h^2 \int_0^h 1 \, dx = h \cos h^2 \right)$$