ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 57 - 27.2.2023

Additività: ~~a<b<c~~ $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c$

$\left[\int_b^a f = -\int_a^b f \right.$ f R-int.

Linearità
$$\begin{cases} \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f & (*) \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. & (**) \end{cases}$$

f e g sono R-int.

$\int_a^b : R([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ limitata, R-integrabile}\}$

sono uno sp. vettoriale

operatore lineare.

dim Passo 1 ($\lambda = -1$) dimostriamo che $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$

$$S^*(-f, P) = -S_*(f, P) \ldots$$

Passo 2 $\lambda \geq 0$ $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

$$S^*(\lambda f, P) = \lambda S^*(f, P) \ldots$$

Vale (*)

Passo 3 $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ (**)

Hyp: $f, g \in R([a,b])$ Th: $f+g \in R([a,b])$
e (**)

$$S^*(f+g, P) \leq S^*(f, P) + S^*(g, P)$$
$$\Uparrow$$
$$\sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g$$
$$\inf_{z\in A} (f+g)(z) \geq \inf_{x\in A} f(x) + \inf_{y\in A} g(y)$$
$$\Downarrow$$
$$S_*(f+g, P) \geq S_*(f, P) + S_*(g, P)$$

$$S^*(f+g, P) - S_*(f+g, P) \leq \left(S^*(f, P) - S_*(f, P)\right) + \left(S^*(g, P) - S_*(g, P)\right)$$

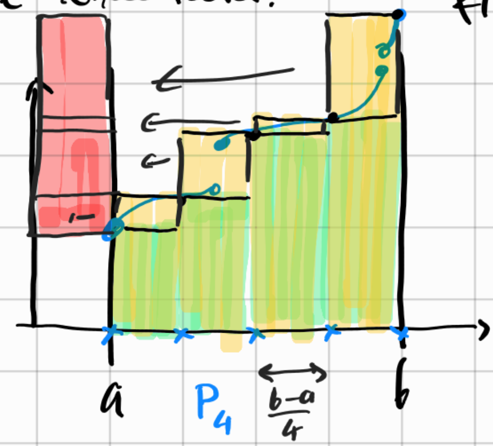
Per il criterio di integrabilità $f+g$ è R-integrabile e $\int(f+g) = \int f + \int g$. □

<u>Teorema</u> (integrabilità delle funzioni monotone)

Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è monotona allora f è R-integrabile su $[a,b]$

dim Per fissare le idee supponiamo f crescente.

① f è limitata. $f(a) \le f(x) \le f(b)$



P_n = suddivisione di $[a,b]$ in n parti eguali
$= \left\{ a + k\cdot\frac{b-a}{n} : k = 0,1,\dots,n \right\}$

$$\inf f([x_{k-1},x_k]) = f(x_{k-1})$$
$$\sup f([x_{k-1},x_k]) = f(x_k)$$

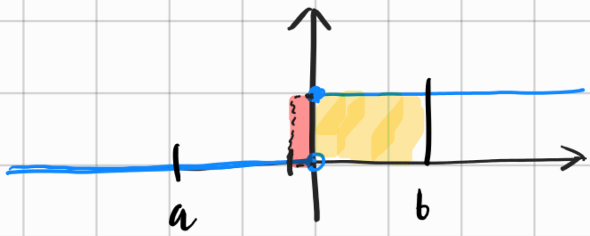
$$S^*(f,P_n) - S_*(f,P_n) = \big(f(b)-f(a)\big)\cdot\frac{b-a}{n} \longrightarrow 0$$
per $n \to +\infty$

(usando il criterio di integrabilità) $\square$

Esempio $\quad H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ funzione di Heavyside

H è integrabile su ogni $[a,b]$

$a<0$
$b>0$



$\int_a^b H = b$

$P = \{a, 0, b\}$ non basta

$\sup H([a,0]) = 1$
$\inf H([a,0]) = 0$

devo prendere
$P_\varepsilon = \{a, -\varepsilon, 0, b\}$

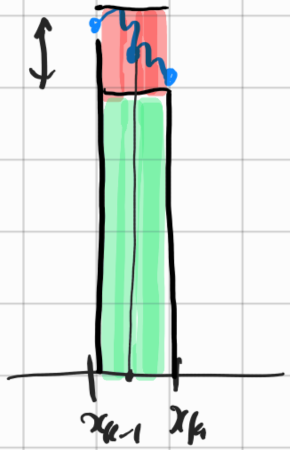
$S^*(H,P_\varepsilon) = b + \varepsilon$
$S_*(H,P_\varepsilon) = b$ | f è integrabile e

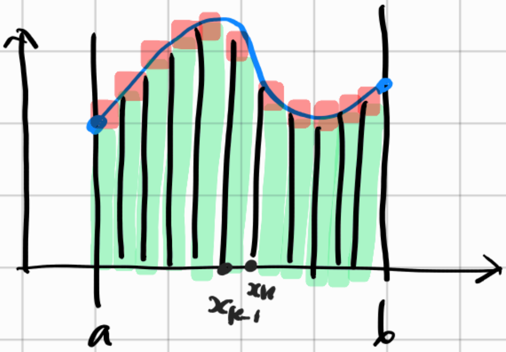
[Osservazione sulla additività se $h = f+g \in R \not\Rightarrow f,g \in R$
altrimenti ogni $f \in R$ visto che posto $g = h - f$. $f+g = h$]

Integrabilità delle funzioni continue

Teo Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uniformemente continua. Allora f è R-integrabile su $[a,b]$.

dim (tentativo).





f continua $\Rightarrow$ f limitata su $[a,b]$

↑

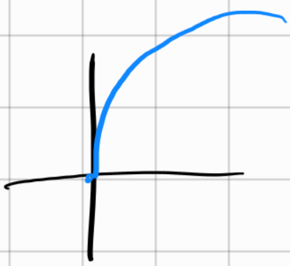
Weierstrass

$$\sup f([x_{k-1},x_k]) = \max f([x_{k-1},x_k])$$
$$\inf f([x_{k-1},x_k]) = \min f([x_{k-1},x_k])$$

$$\sup f([x_{k-1},x_k]) - \inf f([x_{k-1},x_k]) =: \operatorname*{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.c. $|x-x_k|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_k)|<\varepsilon$.

$\uparrow \quad \uparrow \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{osc}_{[x_k-\delta,\,x_k+\delta]} f < \varepsilon.$



Scelto P_n = suddivisione di $[a,b]$ in n parti uguali

$$= \left\{ a + k\frac{b-a}{n} : k=0,1,\dots,n \right\}$$

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

Mi servirebbe poter dire che $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.

$\operatorname{osc} f(I) < \varepsilon$ se $I = [\alpha, \alpha+\delta]$

cioè:

$(*)$ $\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.}$

$\forall x,y \in [a,b]$

IPOTESI AGGIUNTIVA

UNIFORME CONTINUITA'

Se vale $(*)$ riesco a concludere.

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ come dato da $(*)$

se $\frac{b-a}{n}<\delta$ allora i punti di P_n distano tra loro meno di δ.

$$\operatorname*{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f = \max f([x_{k-1},x_k]) - \min f([x_{k-1},x_k]) = f(\bar{x}) - f(\underline{x}) \leq \varepsilon.$$

$$|\bar{x}-\underline{x}|<\delta$$

$$\underbrace{S^*(f,P_n)-S_*(f,P_n)} = \sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\cdot \operatorname*{osc}_{[x_{k-1},x_k]} f \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$$

$$= \varepsilon(b-a)$$

Per i criteri di integrabilità f è R. integrabile.

Uniforme continuità

Def $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice essere <u>uniformemente continua</u> se:

U.C. $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \boxed{\forall x \in A} \forall y \in A : |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$

δ non dipende da x.

Ricordiamo la definizione di continuità. f è continua se:

$\forall x \in A$: f è continua in x

C • $\boxed{\forall x \in A} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall y \in A : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

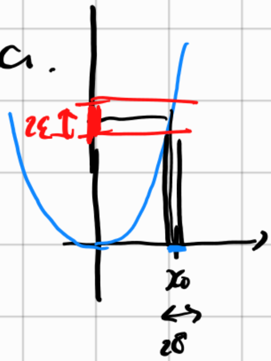
$\Updownarrow$

• $\forall \varepsilon > 0 \ \boxed{\forall x \in A} : \exists \delta > 0 : \forall y \in A \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| <$

$\uparrow$
δ può dipendere da x

"$\exists \delta \ \forall x$" $\Rightarrow$ "$\forall x \ \exists \delta$"

f uniformemente $\Rightarrow$ f continua.



<u>Esempio</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

è continua ma non uniformemente continua.

Se lo fosse:

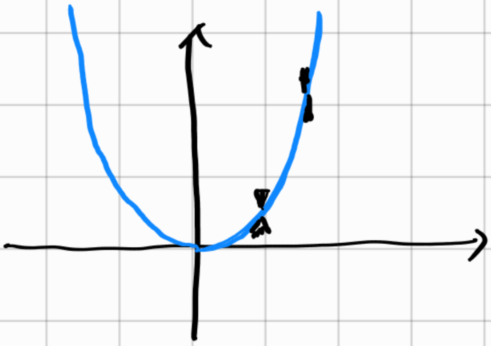
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \underbrace{|x-y| < \delta}_{y = x + \frac{\delta}{2}} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(y)| < \varepsilon}_{(x>0)}$ $\qquad$ Se fosse U.C.

$\varepsilon = 1 \quad \exists \delta.$

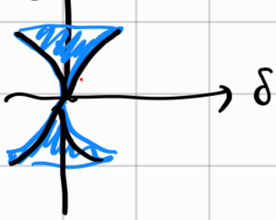
$$|f(x)-f(y)| = f\left(x+\frac{\delta}{2}\right) - f(x) = \left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2 = \delta x + \frac{\delta^2}{4} < 1$$

$\downarrow \ x \to +\infty$

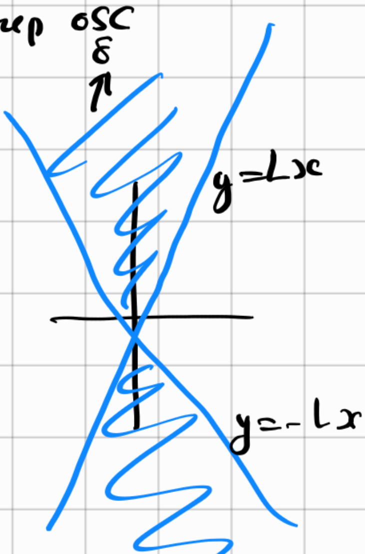
$+\infty$.

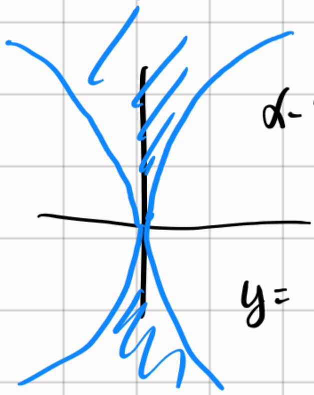


Se f è U.C. $\quad \varepsilon = \sup \operatorname{osc}_\delta$



Lipschitz:





α-Hoelderiano

$y = c \cdot x^\alpha \qquad 0 < \alpha < 1$

f lipschitz se

$\exists L : \quad |f(x)-f(y)| \le L\,|x-y| \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{L}$

f α-Hölder $\quad 0<\alpha\le 1$

$\exists C : \quad |f(x)-f(y)| \le C\,|x-y|^{\alpha}, \quad \delta \overset{?}{=} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}{C}$

f lipschitz $\Rightarrow$ f è unif. continua

$\Downarrow$ $\boxed{\text{su un dominio limitato}}$

f Hölder $\nearrow$

<u>ES</u> $\quad f(x) = \sqrt{x} \quad$ è uniformemente continua.
