

# I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. dell'Energia

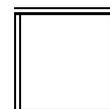
A.A. 2008/2009, 26 Gennaio 2009

Tema 2

COGNOME E NOME: .....

MATRICOLA: ..... SQUADRA: .....

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---



**N.B.** *Gli esercizi n. 4,5,6 sono relativi alla* **SECONDA PROVA PARZIALE.**

**ESERCIZIO 1.** [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \exp\left(\frac{n+2}{5n+9}\right) - \exp\left(\frac{1}{5}\right) \right).$$

Determinare lo sviluppo asintotico di  $\left( e^{\frac{n+2}{5n+9}} - e^{\frac{1}{5}} \right)$  :

(Se esiste)

$$\ell =$$

**ESERCIZIO 2.** [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n (3 + n^2)}{n^3}$$

al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

**ESERCIZIO 3.** [9 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = e^{x|x|} \sqrt{3x^2 - 1}.$$

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di  $f$ .

- (v) Determinare l'immagine di  $f$  :

$$\text{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

**ESERCIZIO 4.** [4 punti] Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_1^{1+\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x-1}) dx$$

esplicitando i passaggi principali ed i metodi di risoluzione utilizzati.

**ESERCIZIO 5.** [7 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} + y \ln x - e^{x(1-\ln x)} = 0 \quad x > 0. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni)  $x \mapsto \varphi_c(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni)  $x \mapsto \psi_c(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare la soluzione  $x \mapsto \psi(x)$ ,  $x > 0$ , del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} + y \ln x - e^{x(1-\ln x)} = 0, \\ y(1) = -e, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

**ESERCIZIO 6.** [7 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 - y^2}.$$

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f_x(x, y) =$$

$$f_y(x, y) =$$

e determinare eventuali punti critici di  $f$ :

- (iii) Calcolare la matrice Hessiana nei punti critici e determinare la natura dei punti critici di  $f$ .

- (iv) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(1, 1, 1)$ :