

## ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2017/18 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio.

### 1. Esercizi del 10 marzo

**Esercizio 1.1.** Costruisci due atlanti lisci non compatibili su  $\mathbb{R}$ . Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe. (Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione  $n \leq 3$  sono sempre diffeomorfe. Questo può non essere vero in dimensione  $n \geq 4$ .)

**Esercizio 1.2.** Siano  $M$  e  $N$  due varietà topologiche e  $f: M \rightarrow N$  un omeomorfismo. Data una struttura liscia su  $N$ , esiste un'unica struttura liscia su  $M$  tale che  $f$  sia un diffeomorfismo.

**Esercizio 1.3.** Siano  $M$  e  $N$  due varietà topologiche e  $f: M \rightarrow N$  un omeomorfismo locale. Data una struttura liscia su  $N$ , esiste un'unica struttura liscia su  $M$  tale che  $f$  sia un diffeomorfismo locale.

**Esercizio 1.4.** Concludi la dimostrazione che la mappa  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow S^2$  costruita a lezione è un diffeomorfismo verificando che nella carta opportuna è del tipo

$$[z, 1] \mapsto \frac{1}{1 + 4|z|^2} (4\Re z, -4\Im z, 1 - 4|z|^2).$$

(Nota: il fattore 4 può scomparire se si cambia tipo di proiezione stereografica.)

**Esercizio 1.5.** Sia  $p(z) \in \mathbb{C}[z]$  polinomio di grado  $d \geq 1$ . Considera l'insieme  $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$ . Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \\ z &\longmapsto p(z) \end{aligned}$$

è un rivestimento liscio di grado  $d$ .

**Esercizio 1.6.** Considera il gruppo  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$  generato da

$$f(x, y) = (x + 1, y), \quad g(x, y) = (-x, y + 1).$$

Mostra che  $\Gamma$  agisce in modo libero e propriamente discontinuo, e che il quadrato  $Q$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 1)$  è un dominio fondamentale.

**Esercizio 1.7.** Considera il gruppo  $\Gamma < \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$  generato da

$$f(x, y) = \left(2x, \frac{1}{2}y\right).$$

Mostra che  $\Gamma$  non agisce in modo propriamente discontinuo sulla varietà  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Mostra che la mappa  $M \rightarrow M/\Gamma$  è comunque un rivestimento, ed

il quoziente  $M/\Gamma$  è una superficie non di Hausdorff (ogni punto ha un intorno omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , ma non è di Hausdorff!).

**Esercizio 1.8.** Considera il gruppo  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$  generato da:

$$f(x, y, z) = (x + 1, y, z), \quad g(x, y, z) = (x, y + 1, z), \\ h(x, y, z) = (-x, -y, z + 1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

**Esercizio 1.9.** Usando solo la seconda definizione di varietà orientata, mostra il fatto seguente. Sia  $M$  una varietà orientata. Dato un punto  $p \in M$ , esiste un intorno  $U(p)$  tale che l'orientazione di  $T_x M$  per ogni  $x \in U(p)$  dipende solo da quella di  $T_p M$ . In altre parole, se due orientazioni coincidono in  $T_p M$ , devono farlo in  $T_x M$  per ogni  $x \in U(p)$ .

**Esercizio 1.10.** Dimostra che le due definizioni di varietà orientata sono equivalenti.

## 2. Esercizi del 17 marzo

**Esercizio 2.1.** Mostra che una immersione iniettiva propria è un embedding.

**Esercizio 2.2.** Sia  $S \subset M$  una sottovarietà liscia. Mostra che la mappa inclusione  $i: S \hookrightarrow M$  è un embedding. Mostra che  $i$  è propria se e solo se  $S$  è un sottoinsieme chiuso.

**Esercizio 2.3.** Sia  $M \subset N$  una sottovarietà liscia e  $S \subset M$  una sottovarietà liscia. Mostra che  $S \subset N$  è una sottovarietà liscia.

**Esercizio 2.4.** Sia  $M$  compatta e  $N$  connessa. Se  $\dim M = \dim N$ , mostra che ogni embedding  $M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo.

**Esercizio 2.5.** Siano  $p, q$  due numeri reali con  $\frac{p}{q}$  irrazionale. Mostra che la mappa

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1 \\ t \longmapsto (e^{pit}, e^{qit})$$

è una immersione iniettiva e che l'immagine è densa in  $S^1 \times S^1$ .

**Esercizio 2.6.** Sia  $f: M \rightarrow N$  una mappa fra varietà lisce. Mostra che

$$i: M \hookrightarrow M \times N, \quad p \longmapsto (p, f(p))$$

è un embedding.

**Esercizio 2.7.** Mostra che una sommersione è sempre una mappa aperta. Deduci che se  $M$  è compatta allora non esistono sommersioni  $M \rightarrow \mathbb{R}^k$  per nessun  $k$ .

**Esercizio 2.8.** Sia  $f: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la mappa

$$f([x, y, z]) = \frac{x^2 - y^2, xy, xz, yz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Mostra che  $f$  è un embedding.

**Esercizio 2.9.** Costruisci un embedding esplicito della bottiglia di Klein  $K$  in  $\mathbb{R}^n$ , per qualche  $n$ .

**Esercizio 2.10.** Costruisci un embedding del toro  $n$ -dimensionale

$$S^1 \times \dots \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

per ogni  $n \geq 1$ .

### 3. Esercizi del 24 marzo

**Esercizio 3.1.** Mostra che l'isomorfismo canonico

$$\text{Mult}(V_1, \dots, V_k; W) \longrightarrow \text{Mult}(V_1, \dots, V_k, W^*)$$

definito mandando  $F \in \text{Mult}(V_1, \dots, V_k; W)$  nella mappa

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}^*) \longmapsto \mathbf{w}^*(F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k))$$

è effettivamente un isomorfismo.

**Esercizio 3.2.** Siano  $U, V, W$  spazi vettoriali. Mostra che esiste un isomorfismo canonico tra gli spazi vettoriali

$$\text{Mult}(U, V; W), \quad \text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W)).$$

**Esercizio 3.3.** Dimostra le relazioni seguenti in  $V \otimes W$ :

$$(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}, \quad \mathbf{v} \otimes (\mathbf{w} + \mathbf{w}') = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}',$$

$$\lambda(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\lambda\mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes (\lambda\mathbf{w}),$$

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{0} \iff \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ or } \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

**Esercizio 3.4.** Siano  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$  e  $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$  vettori non nulli.

(1) Se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  sono indipendenti, allora  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}'$  lo sono.

(2) Se inoltre anche  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{w}'$  sono indipendenti, allora

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}' \in V \otimes W$$

non è un elemento puro.

**Esercizio 3.5.** Considera l'isomorfismo canonico  $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$ . Mostra che tramite questo isomorfismo gli elementi puri sono mandati precisamente negli omomorfismi di rango  $\leq 1$ .

**Esercizio 3.6.** Sia  $g$  un prodotto scalare su  $V$ , che induce un prodotto scalare su ciascun spazio tensoriale  $\mathcal{T}_h^k(V)$ .

- (1) Se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale per  $V$ , allora anche la base indotta da  $\mathcal{B}$  per  $\mathcal{T}_h^k(V)$  è ortonormale.
- (2) Se  $g$  è definito positivo su  $V$ , anche il prodotto scalare indotto su  $\mathcal{T}_h^k(V)$  è definito positivo.

#### 4. Esercizi del 7 aprile

**Esercizio 4.1.** Ricordiamo che  $\mathbb{R}P^n$  è l'insieme delle rette vettoriali  $l$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Considera l'insieme

$$E = \{(l, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in l\}.$$

Mostra che  $E$  è una sottovarietà liscia di  $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  e che la mappa  $E \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ,  $(l, v) \mapsto l$  è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

**Esercizio 4.2.** Mostra che il fibrato tangente del toro  $n$ -dimensionale è banale per ogni  $n$ .

**Esercizio 4.3.** Mostra che il fibrato tangente  $TK$  della bottiglia di Klein  $K$  ha una sezione mai nulla ma non ha un frame.

**Esercizio 4.4.** Mostra che il fibrato tangente  $TM$  di una varietà  $M$  è sempre orientabile, anche se  $M$  non lo è.

**Esercizio 4.5.** Dimostra che esistono esattamente due fibrati vettoriali di rango 1 con base  $S^1$  a meno di isomorfismi.

**Esercizio 4.6.** Sia  $M$  una varietà liscia e  $TM$  il suo fibrato tangente. Mostra che esiste sempre un fibrato vettoriale  $E \rightarrow M$  tale che  $TM \oplus E$  sia un fibrato vettoriale banale.

**Esercizio 4.7.** Costruisci un fibrato  $E \rightarrow K$  con fibra  $F = S^1$  sopra la bottiglia di Klein  $K$ , tale che  $E$  sia una 3-varietà compatta orientabile (consiglio: puoi usare un esercizio della prima settimana).

**Esercizio 4.8.** Mostra che qualsiasi varietà non-orientabile  $M$  di dimensione  $n$  è contenuta in una varietà orientabile di dimensione  $n + 1$ .

**Esercizio 4.9.** Sia  $E \rightarrow M$  un fibrato vettoriale e  $S \subset M$  un sottoinsieme chiuso. Mostra che ogni sezione parziale definita su  $S$  si estende ad una sezione globale su  $M$  (suggerimento: adatta la dimostrazione vista per le funzioni  $S \rightarrow \mathbb{R}^k$ ).

**Esercizio 4.10.** Se  $M$  è orientabile e  $N$  non è orientabile, il prodotto  $M \times N$  può essere orientabile? E se entrambe  $M$  e  $N$  sono non orientabili?

## 5. Esercizi del 14 aprile

**Esercizio 5.1.** Data una matrice quadrata  $A$ , sia  $X_A$  il campo vettoriale su  $\mathbb{R}^n$  dato da  $X_A(x) = Ax$ . Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

**Esercizio 5.2.** Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali  $X, Y, Z$  su una varietà  $M$ , vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

**Esercizio 5.3.** Mostra che lo spazio proiettivo  $\mathbb{R}P^n$  ammette un campo vettoriale mai nullo se e solo se  $n$  è dispari (puoi usare il fatto analogo per le sfere).

**Esercizio 5.4.** Sia  $X$  un campo vettoriale su una varietà  $M$ . Siano  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$  una curva integrale e  $p \in M$  un punto tali che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = p$ . Mostra che  $X(p) = 0$ .

**Esercizio 5.5.** Sia  $M$  una varietà, siano  $X, Y$  campi vettoriali su  $M$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ . Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

**Esercizio 5.6.** Mostra che una superficie orientabile che ammette un campo di vettori mai nulli è sempre parallelizzabile.

**Esercizio 5.7.** Sia  $\tilde{M} \rightarrow M$  un rivestimento liscio fra varietà lisce. Mostra che se  $M$  è parallelizzabile, anche  $\tilde{M}$  è parallelizzabile.

**Esercizio 5.8.** Costruisci un campo vettoriale mai nullo su ciascun spazio lenticolare  $L(p, q)$ .

**Esercizio 5.9.** Mostra sul toro  $T = S^1 \times S^1$  esiste un campo vettoriale che contiene contemporaneamente linee integrali con supporto compatto e non compatto (non basta un disegno: descrivi il campo in modo rigoroso).

**Esercizio 5.10.** Mostra che la mappa esponenziale  $\exp: \mathfrak{so}(n) \rightarrow SO(n)$  è suriettiva.

## 6. Esercizi del 21 aprile

**Esercizio 6.1.** Mostra che una distribuzione  $D$  di rango 1 (in una varietà  $M$  qualsiasi) è sempre integrabile.

**Esercizio 6.2.** Sia  $D$  una distribuzione in  $M$  e  $D'$  una distribuzione in  $M'$ . La distribuzione  $D + D'$  in  $M \times M'$  è definita nel modo ovvio, ponendo  $(D + D')_{(p,p')} = D_p + D'_{p'}$ , ricordando che  $T_{(p,p')}(M \times M') = T_p M \times T_{p'} M'$ . Mostra che se  $D$  e  $D'$  sono integrabili allora anche  $D + D'$  è integrabile.

**Esercizio 6.3.** Mostra che ciascuno spazio lenticolare  $L(p, q)$  ammette una foliazione in cerchi (cioè una foliazione di rango 1 con foglie tutte compatte).

**Esercizio 6.4.** Considera  $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ . Per ogni  $p = (z_1, z_2) \in S^3$ , prendiamo la retta complessa

$$r_p = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid w_1 \bar{z}_1 + w_2 \bar{z}_2 = 0\}.$$

- (1) Mostra che  $r_p \subset T_p S^3$ . Quindi  $\{r_p\}_{p \in S^3}$  è una distribuzione di rango due in  $S^3$ , detta *distribuzione di Hopf*.
- (2) Questa distribuzione è integrabile?

**Esercizio 6.5.** Mostra che due embedding  $f, g: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  sono sempre isotopi.

**Esercizio 6.6.** Sia  $M$  una varietà connessa. Sia  $N \subset M$  una ipersuperficie connessa chiusa. Mostra che  $M \setminus N$  ha una o due componenti connesse. Descrivi degli esempi in entrambi i casi.

**Esercizio 6.7.** Sia  $\tilde{M} \rightarrow M$  un rivestimento liscio. Descrivi un metodo per sollevare qualsiasi foliazione di rango  $k$  in  $M$  ad una foliazione di rango  $k$  in  $\tilde{M}$ .

**Esercizio 6.8.** Sia  $E \rightarrow M$  un fibrato. Mostra che una sottovarietà  $S \subset E$  è immagine di una sezione  $\iff$  interseca trasversalmente ogni fibra in un punto.

**Esercizio 6.9.** Mostra che  $SO(3)$  e  $\mathbb{R}P^3$  sono omeomorfi.

Una proprietà  $P$  di una funzione liscia  $f: M \rightarrow N$  è *stabile* se per ogni omotopia  $f_t: M \rightarrow N$ ,  $t \in [0, 1]$ , con  $f_0 = f$ , esiste  $\varepsilon > 0$  tale che tutte le funzioni  $f_t$  con  $t < \varepsilon$  abbiano la proprietà  $P$ .

**Esercizio 6.10.** Sia  $M$  compatta e  $f: M \rightarrow N$  una funzione liscia. Mostra che le seguenti sono proprietà stabili per  $f$ :

- $f$  è una immersione,
- $f$  è una sommersione,
- $f$  è trasversa ad una fissata sottovarietà chiusa  $W \subset N$ .

## 7. Esercizi del 28 aprile

**Esercizio 7.1.** Sia  $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  un nodo (cioè un embedding liscio). Mostra che esiste un piano  $P \subset \mathbb{R}^3$  tale che  $\pi \circ f: S^1 \hookrightarrow P$  sia un'immersione, dove  $\pi$  è la proiezione ortogonale su  $P$ .

La caratteristica di Eulero di una superficie  $S_g$  di genere  $g$  è  $\chi(S_g) = 2 - 2g$ . Questa può essere presa come una definizione.

**Esercizio 7.2.** Siano  $g, g', d \geq 1$  qualsiasi. Mostra che se  $\chi(S_g) = d\chi(S_{g'})$  allora esiste un rivestimento  $S_g \rightarrow S_{g'}$  di grado  $d$ .

**Esercizio 7.3.** Siano  $M$  e  $N$  due varietà connesse senza bordo di dimensione  $n \geq 3$ . Mostra che

$$\pi_1(M \# N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N)$$

dove  $*$  indica il prodotto libero di gruppi (cerca la definizione in rete se non la conosci).

**Esercizio 7.4.** Sia  $\pi: E \rightarrow M$  un fibrato con fibra  $F$  connessa. Fissa un punto base qualsiasi  $x_0 \in E$ . Mostra che  $\pi_*: \pi_1(E, x_0) \rightarrow \pi_1(M, \pi(x_0))$  è un omomorfismo suriettivo. Se si tratta di un fibrato vettoriale, mostra che è un isomorfismo (costruisci un retratto di deformazione di  $E$  su  $M$ ).

**Esercizio 7.5.** Considera il toro  $T = S^1 \times S^1$  con coordinate  $(\theta^1, \theta^2)$  e la 1-forma  $\omega = d\theta^1$ . Considera la 1-sottovarietà  $\gamma_i = \{\theta^i = 0\}$  per  $i = 1, 2$ , orientata come  $S^1$ . Mostra che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \quad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

**Esercizio 7.6.** Sia  $f: M \rightarrow N$  una mappa liscia fra varietà. Siano  $\omega \in \Omega^k(N)$  e  $\eta \in \Omega^h(N)$ . Dimostra che

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge g^*(\eta).$$

**Esercizio 7.7.** Sia  $f: U \rightarrow V$  una mappa liscia fra aperti  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Scriviamo  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Per non confonderci usiamo variabili diverse  $(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$  e  $(y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ . Mostra che

$$f^*(dx^i) = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j = df_i.$$

**Esercizio 7.8.** Se  $\varphi: M \rightarrow N$  è liscia e  $\omega \in \Omega^k(N)$ , otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

*Suggerimento.* Mostra il teorema nel caso in cui  $\omega = f$  sia una funzione e nel caso in cui  $\omega = dg$  sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di  $d$  rispetto alle operazioni  $+$  e  $\wedge$ .  $\square$

**Esercizio 7.9.** Usa il teorema di Stokes per dimostrare il teorema del rotore:

$$\int_S \text{Rot} X \cdot d\mathbf{n} = \int_{\partial S} X \cdot \mathbf{t}$$

valido per qualsiasi superficie orientata  $S \subset \mathbb{R}^3$ , campo vettoriale  $X$  in  $\mathbb{R}^3$  definito su  $S$ , campo normale unitario  $\mathbf{n}$  a  $S$  e campo tangente unitario  $\mathbf{t}$  a  $\partial S$ , orientati entrambi in modo coerente con l'orientazione di  $S$  e di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 7.10.** Sia  $M$  una  $n$ -varietà. Mostra che una  $n$ -forma  $\omega$  è una forma di volume per  $M$  rispetto ad una qualche orientazione di  $M$  se e solo se  $\omega(p) \neq 0$  per ogni  $p \in M$ .

## 8. Esercizi del 5 maggio

**Esercizio 8.1.** Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \longrightarrow 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = 0.$$

**Esercizio 8.2.** Sia  $M$  una  $n$ -varietà connessa, compatta, orientata e senza bordo. Sia  $N$  ottenuta da  $M$  rimuovendo un punto. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} b^i(N) &= b^i(M) \quad \forall i \leq n-1, \\ b^n(N) &= b^n(M) - 1. \end{aligned}$$

*Suggerimento.* Usa Mayer – Vietoris con  $M = U \cup V$ ,  $U = N$ , e  $V$  palla aperta contenente il punto rimosso.  $\square$

**Esercizio 8.3.** Sia  $M \# N$  la somma connessa di due varietà connesse, orientate, compatte e senza bordo. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} b^i(M \# N) &= 1 \quad \text{se } i = 0, n, \\ b^i(M \# N) &= b^i(M) + b^i(N) \quad \text{se } 0 < i < n. \end{aligned}$$

Puoi usare l'esercizio precedente. Deduci che i numeri di Betti della superficie  $S_g$  di genere  $g$  sono

$$b^0(S_g) = 1, \quad b^1(S_g) = 2g, \quad b^2(S_g) = 1.$$

**Esercizio 8.4.** Calcola i numeri di Betti della superficie ottenuta togliendo  $k$  punti al piano  $\mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 8.5.** Dimostra che la superficie  $\mathbb{C} \setminus Z$  ha  $b^1 = \infty$ .

**Esercizio 8.6.** Sia  $E \rightarrow M$  un fibrato vettoriale. Mostra che le due varietà  $E$  e  $M$  sono omotopicamente equivalenti.

**Esercizio 8.7.** Sia  $K \subset S^3$  un nodo. Mostra che  $H^1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{R}$ .

**Esercizio 8.8.** Siano  $M$  e  $N$  due varietà compatte con bordo e  $\varphi: \partial M \rightarrow \partial N$  un diffeomorfismo. Sia  $W$  ottenuta incollando  $M$  con  $N$  via  $\varphi$ . Mostra che

$$\chi(W) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(\partial M).$$

**Esercizio 8.9.** Calcola i numeri di Betti della varietà  $M$  ottenuta da  $\mathbb{R}^3$  rimuovendo gli assi  $x$  e  $y$ .

**Esercizio 8.10.** Sia  $S \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  un sottospazio proiettivo di dimensione complessa  $k \leq n$ . Mostra che la mappa  $i^*: H^{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \rightarrow H^{2k}(S)$  è un isomorfismo.

## 9. Esercizi del 12 maggio

**Esercizio 9.1.** Dimostra il Lemma dei 5.

**Esercizio 9.2.** Mostra che i numeri di Betti del toro  $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n$  sono

$$b^k(T^n) = \binom{n}{k}.$$

**Esercizio 9.3.** Siano  $M$  e  $N$  varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

**Esercizio 9.4.** Sia  $T = S^1 \times S^1$  un toro e  $p \in T$  un punto qualsiasi. Considera la 4-varietà  $M = T \times T$  e le sottovarietà  $N_1 = T \times \{p\}$  e  $N_2 = \{p\} \times T$ . Calcola tutti i gruppi di coomologia di De Rham della 4-varietà

$$X = M \setminus (N_1 \cup N_2).$$

**Esercizio 9.5.** Siano  $L, L'$  due sottospazi affini di  $\mathbb{R}^n$ .

- (1) Mostra che le varietà  $\mathbb{R}^n \setminus L$  e  $\mathbb{R}^n \setminus L'$  sono omotopicamente equivalenti se e solo se  $\dim L = \dim L'$ .
- (2) Mostra che se  $\dim L > \dim L'$  allora qualsiasi mappa continua  $f: (\mathbb{R}^n \setminus L) \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus L')$  è omotopa ad una mappa costante.

**Esercizio 9.6.** Siano  $r_1, r_2, r_3$  tre rette nel piano proiettivo complesso  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  con intersezione vuota  $r_1 \cap r_2 \cap r_3 = \emptyset$ .

- (1) Calcola i gruppi di coomologia di De Rham della varietà liscia  $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus (r_1 \cup r_2 \cup r_3)$ .
- (2) Dimostra che esiste una mappa  $f: X \rightarrow X$  tale che  $f^*: H^*(X) \rightarrow H^*(X)$  non sia né l'identità né banale.

**Esercizio 9.7.** Sia  $\pi: E^{n+k} \rightarrow M^n$  un fibrato con fibra diffeomorfa a  $F^k$ . Supponi che  $M, E, F$  siano tutte compatte, orientabili e senza bordo. Mostra che se  $s: M \rightarrow E$  è una sezione, allora il duale di Poincaré di  $s(M)$  è un elemento non nullo in  $H^k(E)$ . Deduci che la fibrazione di Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$  non ha sezioni.

*Suggerimento.* Usa la relazione fra  $\wedge$  e intersezione trasversa (che abbiamo enunciato e non dimostrato).  $\square$

**Esercizio 9.8.** Considera la varietà riemanniana seguente (è lo spazio iperbolico nel modello del semispazio):

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \quad g = \frac{1}{x_n^2} g^E.$$

Qui  $g^E$  è il tensore euclideo. Mostra che le mappe seguenti sono isometrie per la varietà riemanniana  $H^n$ :

- $f(x) = x + b$ , con  $b = (b_1, \dots, b_{n-1}, 0)$ ;
- $f(x) = \lambda x$  con  $\lambda > 0$ .

Deduci che il gruppo di isometrie  $\text{Isom}(H^n)$  di  $H^n$  agisce transitivamente sulla varietà riemanniana  $H^n$ .

**Esercizio 9.9.** Considera la varietà riemanniana dell'esercizio precedente in dimensione due:

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

Calcola l'area del dominio

$$[-a, a] \times [b, \infty)$$

per ogni  $a, b > 0$ . L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana  $H^2$ .

**Esercizio 9.10.** Sia  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  un rivestimento liscio. Mostra come una struttura riemanniana su  $M$  ne induca una su  $\tilde{M}$  per cui  $p$  è una isometria locale.

#### 10. Esercizi del 19 maggio

**Esercizio 10.1.** Calcola i simboli di Christoffel nel piano iperbolico con il modello del semipiano  $H^2$  descritto nell'Esercizio 9.9. Mostra che

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}.$$

**Esercizio 10.2.** Considera ancora  $H^2$ . Sia  $v_0 = (0, 1)$  punto tangente nel punto  $(0, 1) \in H^2$ . Sia  $v_t$  il trasporto parallelo di  $v_0$  lungo la curva  $\gamma(t) = (t, 1)$ . Mostra che  $v_t$  fa un angolo  $t$  con l'asse delle ordinate. Deduci che  $\gamma$  non è una geodetica. Puoi usare l'esercizio precedente.

**Esercizio 10.3.** Un *frame* su una varietà riemanniana  $M$  è il dato di un punto  $p \in M$  e di una base ortonormale  $v_1, \dots, v_n$  per  $T_p M$ . Mostra che le isometrie di  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$  e  $\mathbb{H}^n$  agiscono transitivamente sui frame. Ricordiamo che a lezione abbiamo scoperto che

- $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) \supset \{f(x) = Ax + b \mid A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$ ,
- $\text{Isom}(S^n) \supset O(n+1)$ ,
- $\text{Isom}(I^n) \supset O^+(n, 1)$ .

Qui  $O^+(n, 1) < O(n, 1)$  è il sottogruppo di indice due che consiste nelle matrici che non scambiano le due falde dell'iperboloide.

**Esercizio 10.4.** Scrivi la metrica euclidea  $g$  su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  usando coordinate polari  $(\theta, \rho)$  e determina i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita rispetto a queste variabili  $\theta, \rho$ .

**Esercizio 10.5.** Considera la connessione  $\nabla$  su  $\mathbb{R}^3$  con simboli di Christoffel

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = 1$$

$$\Gamma_{21}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = -1$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel nulli. Mostra che questa connessione è compatibile con il tensore metrico euclideo  $g$ , ma non è simmetrica.

**Esercizio 10.6.** Considera il modello del disco dello spazio iperbolico  $(B^n, g)$ , dato da

$$g(x) = \left( \frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 g^E(x)$$

dove  $g^E$  è il tensore metrico euclideo. Sia  $v \in S^{n-1}$ . Mostra che la geodetica massimale passante per l'origine in direzione  $v$  è

$$\gamma(t) = \tanh(t/2)v = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}v.$$

*Suggerimento.* Usa il fatto che  $g$  ha una simmetria sferica e quindi  $O(n)$  è un gruppo di isometrie.  $\square$

**Esercizio 10.7.** Usa l'esercizio precedente per dimostrare che la mappa esponenziale  $\exp_p: T_p\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  è un diffeomorfismo in qualsiasi punto  $p \in \mathbb{H}^n$ .

## 11. Esercizi del 26 maggio

**Esercizio 11.1.** Sia  $f: M \rightarrow N$  una isometria locale fra varietà riemanniane connesse. Mostra che se  $M$  è completa, allora  $f$  è un rivestimento.

**Esercizio 11.2.** Sia  $f: M \rightarrow N$  una isometria locale fra varietà riemanniane connesse che è anche un rivestimento. Mostra che  $M$  è completa  $\iff N$  è completa.

**Esercizio 11.3.** Una varietà riemanniana è *omogenea* se per ogni  $p, q \in M$  esiste una isometria di  $M$  che porti  $p$  in  $q$ . Mostra che una varietà riemanniana omogenea è sempre completa.

**Esercizio 11.4.** Una varietà riemanniana è *isotropa* in  $p \in M$  se per ogni coppia di vettori  $v, w \in T_pM$  di norma unitaria esiste una isometria  $f$  di  $M$  tale che  $f(p) = p$  e  $df_p(v) = w$ . Mostra che una varietà riemanniana connessa completa che è isotropa in ogni suo punto è anche omogenea.

**Esercizio 11.5.** Identifichiamo  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  e scriviamo il modello del semipiano del piano iperbolico come  $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ . Mostra che le trasformazioni

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0$  sono isometrie di  $H^2$ .

**Esercizio 11.6.** Considera il modello dell'iperboloide  $I^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$  dello spazio iperbolico  $\mathbb{H}^n$ . Mostra che per ogni  $p, q \in I^n$  vale l'uguaglianza

$$\cosh d(p, q) = -\langle p, q \rangle.$$