Corso di Geometria analitica e algebra lineare
6 giugno 2008

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ si considerino il sottospazio affine H generato dai punti $P_1 = (1,0,1,0)$, $P_2 = (1,0,0,1)$, $P_3 = (0,1,1,0)$, $P_4 = (2,-1,0,1)$ e, al variare di $t \in \mathbb{R}$, il sottospazio K_t di equazioni

$$\begin{cases} tx_2 + x_3 + x_4 & = & 0, \\ x_1 + tx_2 + x_3 + (1-t)x_4 & = & 2. \end{cases}$$

(i) Determinare dimensione e equazioni cartesiane di H;

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui $H \cap K_t$ non è vuoto e calcolarne la dimensione.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 su $\mathbb{R}$ e sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo tale che $\det(f) = 1$ e $(f^2 + 2\mathrm{Id})(f^2 - 2f + \mathrm{Id}) = 0$.

(i) Determinare il polinomio caratteristico di f e mostrare che f è triangolabile;

(ii) determinare i possibili polinomi minimi e forme di Jordan di f.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia V uno spazio vettoriale di dimensione $2k$ su $\mathbb{K}$. Data una base $\{\phi_1, \ldots \phi_k, \psi_1, \ldots \psi_k\}$ dello spazio duale V^*, si consideri $b\colon V \times V \to \mathbb{K}$ definita da:

$$b(v,w) = \sum_{i=1}^{k} \left[\phi_i(v)\psi_i(w) + \psi_i(v)\phi_i(w)\right].$$

(i) Dimostrare che b è una forma bilineare simmetrica su V;

(ii) determinare il rango di b;

(iii) calcolare la segnatura di b nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.