Corso di Geometria analitica e algebra lineare
16 settembre 2008

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ si considerino le seguenti rette affini:

$$r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \quad s_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \quad s_2 = \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$r_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \quad s_2 = \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$r_4 = \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}, \quad s_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Per ogni $i = 1, \dots, 4$ si definisce l'insieme $X_i = r_i \cup s_i$.

(i) Dire per quali $1 \leq i < j \leq 4$ esiste un'affinità f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(X_i) = X_j$;

(ii) dire per quali $1 \leq i < j \leq 4$ esiste un'isometria f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(X_i) = X_j$;

(iii) scelto uno dei casi al punto (i) o (ii) in cui l'applicazione f esiste, dire se è unica e darne un esempio esplicito.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{C}$, sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo e sia $m_f(t) = (t-1)^n$ il polinomio minimo di f

(i) Dimostrare che per ogni $i = 1, \dots n$ esiste un unico sottospazio $W_i \subseteq V$ tale che $f(W_i) \subseteq W_i$ e $\dim W_i = i$;

(ii) Sia b una forma bilineare simmetrica su V non degenere tale che f sia un'isometria per b. Dimostrare che $W_i^\perp = W_{n-i}$;

(iii) Scrivere esplicitamente un prodotto scalare b non degenere su $V = \mathbb{R}^3$ e un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $m_f(t) = (t-1)^3$ che sia una isometria per b.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e b la forma bilineare simmetrica data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare la segnatura di b.

(ii) Determinare la massima dimensione di un sottospazio $W \subseteq V$ su cui $b|_W$ è degenere.

(iii) Deteminare la massima dimensione di un sottospazio $W \subseteq V$ su cui $b|_W \equiv 0$.