ANNO ACCADEMICO 2003/2004

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I   Secondo compitino 17/12/2003

Esercizio 1

Nello spazio vettoriale ${}_3\mathbb{R}_3$ si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Dire se A è diagonalizzabile.

b) Dire se A e B sono simili.

c) Trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori sia per A che per B.

Esercizio 2

Sia V lo spazio dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali. Costruire, se esiste, un prodotto scalare g su V tale che

a) il radicale di V sia il sottospazio generato da x

b) $x+1$ e x^2+1 siano vettori isotropi

c) $g(x^2+4x+2, x^2+4x+2) = 2$.

Determinare la segnatura di g.

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Sia Φ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V di dimensione n e sia W un sottospazio di V. Se $\dim(W \cap W^{\perp}) > 0$, allora Φ è degenere.

b) Siano A e B matrici in ${}_n\mathbb{R}_n$, con B invertibile. Sia $p(x) = \det(A + xB)$. Se $a \in \mathbb{R}$ è una radice di $p(x)$, allora a è autovalore per AB^{-1}.

c) Sia $T(2,\mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \mid f \text{ è triangolabile}\}$. Allora $T(2,\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$.