

ANNO ACCADEMICO 2004/2005  
CORSO di LAUREA in FISICA  
GEOMETRIA I Secondo compito 17/12/2004

**Esercizio 1**

Si considerino i seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ :

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, y + z - t = 0\},$$
$$W_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Costruire, se esiste, un endomorfismo  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che:

- (1)  $f(W_1) = W_1$  e  $f(W_2) = W_2$ ;
- (2)  $f$  non è surgettiva;
- (3)  $f$  non è diagonalizzabile.

**Esercizio 2**

Sia  $\phi : M(2, \mathbb{R}) \times M(2, \mathbb{R})$  l'applicazione definita da

$$\phi(A, B) = \text{tr}((A + {}^tA)B).$$

- (1) Verificare che  $\phi$  è un prodotto scalare;
- (2) Dire se è degenere e, se sì, trovare una base del radicale di  $\phi$ ;
- (3) Trovare una base ortogonale e calcolare la segnatura di  $\phi$ ;
- (4) Determinare, se esiste, un sottospazio  $W$  di dimensione 2, tale che  $V = W \oplus W^\perp$ .

**Esercizio 3**

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

- a) Sia  $\phi$  un prodotto scalare su uno spazio vettoriale  $V$ . Se esiste una base di vettori isotropi, allora  $\phi$  è degenere.

b) Le matrici  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  sono simili.