Anno Accademico 2018/2019
Geometria I
Scritto del 17/2/2020

Esercizio 1.
Siano $A \in M(n, \mathbb{C})$ e $B \in GL(n, \mathbb{C})$ tali che esiste un intero $k \geq 2$ per cui $A^{k+1} = AB^k + BA^k$.

a) Mostrare che $A - B$ è invertibile e $\operatorname{Im} A$ è B-invariante.

b) Mostrare che nella forma canonica di Jordan di A non ci sono blocchi nilpotenti di ordine maggiore di 1.

c) Mostrare che, se $B^{k+1} = I$, $\operatorname{Ker} A$ è B-invariante e B commuta con A^{k+1}.

Esercizio 2.
Si consideri $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to M(2, \mathbb{R})$ definita da $\phi(X, Y) = XY^\top$, per ogni $(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Al variare di $M \in M(2, \mathbb{R})$, si consideri $\psi_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $\psi_M(X, Y) = X^\top MY$, per ogni $(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

a) Dimostrare che ϕ è bilineare e che $A \in M(2, \mathbb{R})$ appartiene all'immagine di ϕ se e solo se $\operatorname{rk}(A) \leq 1$.

b) Data $M \in M(2, \mathbb{R})$, determinare esplicitamente un'applicazione lineare $f_M : M(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che $\psi_M = f_M \circ \phi$.

c) Dimostrare che f_M come nel punto b) è unica.

Esercizio 3.
Per ogni $A \in M(n, \mathbb{C})$, si ponga $C(A) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) |\ XA = AX\}$. Diciamo che $B \in M(n, \mathbb{C})$ super-commuta con A se per ogni $X \in C(A)$, $XB = BX$.

a) Supponiamo che $\mathbb{C}^n = W \oplus W'$ dove W e W' sono sottospazi A-invarianti, e che B super-commuti con A. Si mostri che allora W è B-invariante e che $B_{|W}$ super-commuta con $A_{|W}$

b) Supponiamo che A sia diagonalizzabile e che B super-commuti con A. Dimostrare che esiste un polinomio $p \in \mathbb{C}[X]$ tale che $B = p(A)$.

Esercizio 4.

a) Sia B una matrice simmetrica reale definita positiva. Per ogni intero $n \geq 1$, dimostrare che esiste un'unica matrice A simmetrica reale definita positiva tale che $A^n = B$.

b) Siano A e B matrici simmetriche reali definite positive tali che esiste $n \geq 2$ per cui $A^n B^n = B^n A^n$. Dimostrare allora che $AB = BA$.

Durata: 3 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.